БИБЛИОТЕКА ГЕШЕН

Проф. С. Валентинер

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

С 13 черт.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
„НАУКА И ЖИЗНЬ“

Русское издание „БИБЛИОТЕКИ ГЕШЕН“

Проф. С. ВАЛЕНТИНЕР

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

С 13 чертежами.

Авторизованный перевод с последнего немецкого издания
Инж. А. А. ПОНОМАРЕВА.

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО
„НАУКА и ЖИЗНЬ“
Берлин — Рига
1923

Набор: Типографии Книгоиздательства „Наука и Жизнь"
Печатано в Типографии W. & S. Löwenthal, Berlin. Grünstrasse 4.

Оглавление.

Глава 3.

Некоторые отделы из теории электричества.

Часть III.

Линейные векторные функции. Диады и тензоры.

Введение.

§ 1. Представление результирующей системы сил.

Векторный анализ является математической дисциплиной почти столь же наглядной, как и сама геометрия; в своих определениях и заключениях она непосредственно следует геометрии. Насколько сжатые, наглядные и выпуклые представления дает векторный анализ — по сравнению с обычным для всех случаев, которые рассматриваются в двух или трехмерном пространстве, будет показано в первом параграфе на примере. Этот пример вместе с тем покажет и на различие двух существенных определений векторного анализа-скаларной величины и вектора.

Пусть на свободное твердое тело действуют силы P_1, P_2, $\ldots P_n$, приложенные в точках p_1, p_2, $\ldots p_n$.

Подобная система сил может быть заменена одной равнодействующей и парой, величина которой находится в зависимости от точки приложения равнодействующей. Аналитические выражения величин равнодействующей и пары мы получаем разложением всех действующих на тело сил на составляющие по каким-либо трем направлениям, напр., в прямоугольной системе координат по направлениям осей координат; складывая затем одинаково направленные слагающие, мы получаем в результате равнодействующую и пару. Так нас учит старая аналитическая механика. Более наглядно и, можно сказать, непосредственно задача решается геометрическим путем, минуя разложение на составляющие, последовательным применением теоремы параллелограмма сил и статических моментов.

Представим себе, что помимо данной системы сил $P_1, P_2 \ldots P_n$, на тело действуют еще две другие, из которых силы первой $P'_1, P'_2 \ldots P_n$ приложены к любым точкам данного тела, но равны по величине силам первоначальной системы и одинаково с ними направлены, а силы второй системы $P''_1 \ldots P''_n$, равные также по величине силам первой системы и приложенные в тех же точках, направлены противоположно. Система $P'_1 \ldots P'_n$ приводится, согласно теореме о параллелограмме сил, или короче говоря посредством геометрического сложения—к равнодействующей R.

$$R = P'_1 (+) \ldots (+) P'_n \tag{1}$$

здесь знак (+) указывает на то, что силы слагаются геометрически, т. е., что принято во внимание их направление. Две остальные системы сил представляют собой систему пар сил, статические моменты которых по своей абсолютной величине, т. е. безотносительно к их направлению, равны

$$P_i \, r_i \sin (P_i \, r_i),$$

где r_i обозначает расстояние точки приложения силы P_i от произвольно выбранной точки приложения равнодействующей; направление r_i берется к точке приложения последней так, чтобы угол $(P_i \, r_i)$ имел постоянно величину $< \pi$. Величины этих моментов откладываем параллельно оси вращения в таком направлении, чтобы для наблюдателя из конечной точки отрезка вращение казалось положительным [1]). Складывая эти отрезки также, как раньше силы, получаем результирующий статический момент.

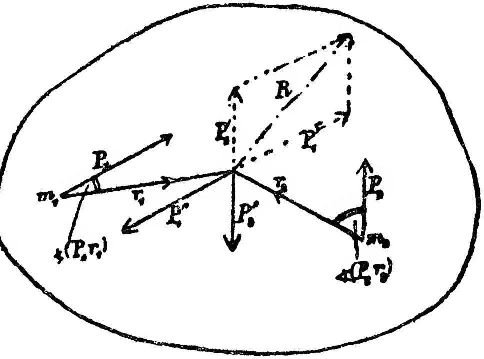
[1]) Т. е. против движения часовой стрелки.

$$K = [P_1 r_1 \sin (P_1 r_1)] (+) \dots (+) (P_n r_n \sin (P_n \; r_n)]$$

Это выражение мы можем написать короче однозначно:

$$K = (P_1 r_1) (+) (P_2 r_2) (+) \dots (+) (P_n r_n), \tag{2}$$

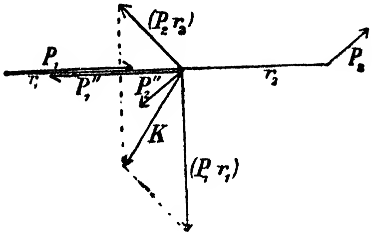
где под $(P_i \; r_i)$ мы представляем себе отрезок, абсолютная величина которого равна произведению: $P_i \; r_i \sin (F_i \; r_i)$, а направление берется перпендикулярно плоскости $P_i \; r_i$ и притом с той стороны этой плоскости, глядя с которой из свободного конца отрезка $(P_i \; r_i)$ кратчайший переход, вращения направления P_i в направление r_i соответствовал бы положительному вращению



Черт. 1.

На черт. 1, при произвольном выборе точки A приложения равнодействующей, дано построение равнодействующей силы R и обоих моментов $(P_1 \; r_1)$ и $(P_2 \; r_2)$ для двух сил, приложенных к твердому телу в точках m_1,—m_2. Точки m_1, m_2 и A, совместно с направлением силы P_1, могут находиться в плоскости чертежа, сила P_2 находится вне плоскости чертежа и направлена кверху. На черт. 2 дано построение результирующей статического момента K. Плоскость чертежа взята параллельно осям вращения пар; отрезки, изображающие моменты, отложены, как по величине, так и по направлению, от одной и той же точки и дают в результате геометрического сложения отрезок K, представляющий собой, как по величине, так и по направлению, результирующий момент пары сил.

Уравнения (1) и (2) дают нам символические представления геометрического построения. В то время, как при аналитическом способе мышления мы складывали между собой лишь величины одного и того же направления (слагающие-компоненты) — в данном случае мы имеем дело со сложением таких членов, которые различаются между собой не только по величине (абсолютному значению), но и по направлению; лишь принимая во внимание направление, мы имеем возможность производить вычисление.



Черт. 2.

В отличие от чисел — скалярных величин, мы обозначаем величины, отличающиеся между собой не только по величине, но и по направлению — векторами, или величинами с данным направлением. Если эти символы применимы для описания различных геометрических построений, или даже физических явлений, и если они дают при этом простые аналитические правила исчисления без последующего перехода к обычным аналитическим способам изображения, то, конечно, методы векторного исчисления, по сравнению с методами чистого алгебраического анализа, имеют большие преимущества в силу их геометрических представлений и большей простоты. Для этих целей были выведены правила исчисления, аналогичные правилам обычного анализа для скалярных величин. Выводу этих правил, составляющих необходимые обоснования метода представлений посредством векторов, посвящена первая часть настоящего томика. Для упражнений и применения правил исчисления во второй части будут разобраны также случаи применения к различным областям физики. Наконец, в третьей части будет рассмотрена важнейшая часть векторного анализа — свойства линейных векторных функций (тензоры, диады).

Действительными основателями векторного анализа надо, собственно назвать Гамильтона и Грасмана, которые, почти одновременно и совершенно независимо друг от друга, ввели определение вектора в аналитическое исчисление, хотя в то же время (1844 г,) были уже сделаны попытки применения аналогичных представлений другими, как напр., в барицентрическом исчислении Мебиуса (1828 г.). Однако, оба названных ученых представляли себе значение нового метода в более ясной форме, чем другие, но их точки зрения были в значительной степени различны. Гамильтон более основывался на геометрии в то время, как Грасман применял геометрию лишь постольку, поскольку она давала наглядные представления для его обширно разработанных геометрических заключений. Его теоремы являются не простыми переложениями теорем геометрии на абстрактный язык, благодаря перенесению их на пространство выше трех изменений, они имеют более общее значение. Поэтому в способах изображения в векторном анализе различают два направления, которые однако в применениях к геометрии, или при описании физических явлений, тесно между собой соприкасаются, и даже отчасти дополняют друг друга.

Часть I.

Правила исчисления векторного анализа.

§ 2. Определение понятия вектора и скалярной величины.

В § 1 мы называли равнодействующую и результирующий статический момент — векторами в силу того, что они представлялись нами в виде определенно направленных отрезков. Для полного определения приведенных в первом примере векторов, необходимо и достаточно иметь три данных соответственно компонентам в аналитическом представлении. Тремя такими данными являются: длина вектора и два угла, образуемые его направлением с неподвижными осями. Так как в данном случае возникает вопрос лишь о величине и направлении изображающего вектор отрезка, то наше представление не зависит от начальной точки отрезка. Если например, результирующая сила R с компонентами X, Y, Z по неподвижным осям координат, проходящим через пространство „A", приложенная в точке x, y, z, должна быть представлена некоторым отрезком в трехмерном пространстве „B", то это представление — поскольку начальная точка изображаемого отрезка совпадает, или не совпадает с началом координат пространства „B" — может быть дано бесчисленным числом способов (иначе говоря — представление бесконечно многозначно). Таким образом параллельные между собой, одинаково направленные и равные по величине отрезки в пространстве по отношению к их значению для представляемого об'екта вполне эквивалентны.

Следовательно, вектор определяется так: **вектором называется величина, которая при совокупности всех принимаемых ею значений определяет в пространстве в постоянном, однозначном и необратимом смысле совокупность всех отрезков, выходящих из произвольно выбранного начала координат.** [1])

Векторами, следовательно, помимо уже названных силы и статического момента, могут быть следующие величины: инерция, скорость, ускорение, ток.

Без сомнения, названные величины соответствуют данному определению вектора. Однако необходимо указать на другую группу векторов, в которой определение вектора признается не сразу.

Абсолютное значение статического момента, т. е. величины, не имеющей направления

$$P_1 r_1 \sin (P_1 r_1)$$

может рассматриваться, как площадь параллелограмма со сторонами P_1, r_1 и углом между ними $\varphi = (P_1, r_1)$. За направление вектора, представляющего статический момент, при геометрическом сложении в §1 принималось направление нормали к плоскости, проходящей через P_1 и r_1. Следовательно, мы можем рассматривать, как вектор, параллелограмм данной величины при данном направлении его нормали. Таким образом, под выше данное опреде-

---

[1]) Это определение дано согласно M. Abraham und A. Föppl — „Theorie d. Elektrizität".

ление вектора попадают и такие величины, как проходящие через начало координат произвольно ограниченные части плоскости,

Наконец, необходимо упомянуть еще третью группу векторов. являющихся величинами, изображенными неограниченными плоскостями, не проходящими через начало. Величина и направлеиие такого вектора определяется однозначно величиной и направлением нормали, проведенной к плоскости из начала координат.

Однако, существует принципиальное различие между векторами, определяемыми непосредственно, как вектор, и двумя упомянутыми последними группами.

Если необходимо перейти от старой системы координат с осями x, y, z, к новой системе, оси которой направлены прямо противоположно первой,[1] так что координаты точки x, y, z во второй системе получают значения $-x$, $-y, -z$, то сила P должна, вследствие подобного преобразования, перейти в $-P$. При подобном преобразовании, вектор изображающий собой статический момент, не изменит знака, если мы будем, согласно § 1, постоянно считать положительным момент, в котором вращение, наблюдаемое с положительной стороны оси, совершается в положительном направлении, т. е. — против движения часовой стрелки.

Векторы, которые при подобном преобразовании меняют знак (векторы, направление которых изображается стрелкой), называются **п о л я р н ы м и** векторами. Векторы, не изменяющие знака при преобразовании координат (векторы представляемые площадью, или отрезком с указанием направления вращения), называются о с е -

[1]) Подобная система обозначается как отрицательная

вымн[1]) (аксиальными). Здесь необходимо подчеркнуть полное безразличие этих свойств для исчисления при помощи векторов; сказанное можно также будет видеть из нижеприводимых выводов (в особенности, в § 11—14); обычно при вычислении иногда даже нельзя сказать определенно является ли данный вектор, полярным или осевым. По Ф. Эмде это может происходить лишь в кинематических процессах, а не в динамических и электромагнитных.

Зависимость вектора от времени и пространства должна, конечно, отмечаться на чертеже, или же на изображающем вектор отрезке.

Если в какой-либо части пространства каждой точке соответствует произвольный вектор, постоянно-изменяющий свое значение с переменой места, то такую часть пространства называют векторным полем и говорят в том же смысле о силовом поле, поле моментов, поле скоростей и т. д.

Противоположны векторам величины, для определения которых необходимо иметь лишь одно данное — абсолютную величину, т. к. для их представления не требуется какого-либо направления в пространстве. Примером подобных величин—так называемых скаларов, —в первую очередь могут служит абсолютные значения самих векторов, т. е. величины длин векторов, безотносительно к направлениям. Другими величинами подобного рода, вполне определяемыми числами, взятыми на основании определенной системы мер, являются: температура, время, отношение одинаково направленных векторов и т. д.

Скаларом мы называем такую величину, которая при совокупности всех значений, принимаемых ею, в

---

[1]) Эти обозначения введены В. Фогтом. Максвелл (Fretaise on electricity) обозначает векторы как трансляторные и ротаторные. Вихерт („Ann Phys u Chem 1896") называет их векторами и роторами

постоянном необратимом и однозначном значении определяет ряд действительных чисел.

Для того, чтобы в дальнейшем при писании формул, иметь возможность сразу делать различие между вектором и скаларом, мы будем постоянно обозначать векторы малыми или большими готическими буквами, а скалары — латинскими. Самый вектор и его абсолютную величину мы будем постоянно обозначать буквами одного и того же значения.

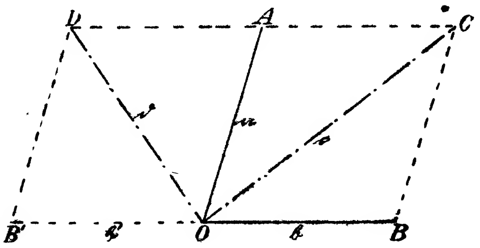
§ 3. Сложение и вычитание векторов. Умножение векторов на скаларные величины.

Два произвольно направленных отрезка $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ (черт. 3) в пространстве складываются таким образом, что начальную точку второго отрезка передвигают до совпадения с конечной точкой первого и затем проводят линию, соединяющую начальную точку первого отрезка с конечной точкой второго. Эта линия OC, представляющая сумму отрезков $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, есть проведенная из произвольно выбранной начальной точки O диагональ параллелограмма $OACB$, две стороны которого, пересекающиеся в начальной точке O, являются данными отрезками.

Так как векторы, согласно определению тождественны отрезкам, то сложение их подобно сложению последних. Для указания действия сложения над векторами мы берем обычный алгебраический знак сложения $+$, так как в силу изображения векторов готическими буквами возможность неправильного понимания исключена. Из черт. 3 следует

$$(1) \qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$$

Разность двух векторов есть ни что иное, как сумма первого и взятого в противоположном направлении второго векторов, иначе говоря—диагональ параллелограмма $OADB'$, стороны которого, пересекающиеся в точке O,



Черт. 3.

являются: первый вектор из числа заданных и второй вектор, направленный противоположно т. е.—$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$ Или, иначе,

(2) $$\mathfrak{a} - \mathfrak{b} = \mathfrak{d}.$$

Обе диагонали построенного из векторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ параллелограмма представляют собой как по величине, так и по направлению, сумму и разность двух векторов.

Разность двух векторов равна нулю, если они равны между собой по величине и одинаково направлены, т. е векторы равны между собой.

Из приведенных формул видно что изменение порядка слагаемых не изменяет результата, и что таким образом,

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_1,$$

т. е., что мы имеем дело с коммутативным законом,

Сумма большего числа векторов $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ и получается путем сложения третьего вектора с суммою первых двух, четвертого с суммой первых трех и т. д. Так как и в данном случае порядок слагаемых не изменяет результата, то, следовательно, помимо коммутативного закона, мы имеем здесь ассоциативный закон:

$$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) + \mathfrak{a}_3 + \ldots = \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3) + \ldots$$

Пример. Уравнение (1) мы можем написать

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = 0;$$

положив: $-\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$, имеем

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}' = 0.$$

Если мы будем рассматривать векторы, как силы, то получим известную теорему:

если силы, приложенные к какой-либо точке, могут быть представлены по величине, по направлению отрезками, образующими при параллельном перемещении замкнутый полигон, то эти силы находятся в равновесии.

Если мы складываем между собой m одинаковых векторов (т. е. равных по величине и одинаково направленных, то получаем вектор того же направления, но больший первоначального в m раз. Если абсолютная величина вектора $\mathfrak{a}$ равна a

$$|\mathfrak{a}| = a,$$

то отношение $\dfrac{\mathfrak{a}}{a}$ представляет собой вектор того же направления что и $\mathfrak{a}$, но равный по своей абсолютной величине 1. Такой вектор называется единичным. В общем случае вектор является произведением скаларной величины на единичный вектор. При умножении на скалар, действуют, как мы видим, законы коммутативный и ассоциативный.

Единичный вектор является величиной, не имеющей измерения. Размерность измерения приписываем лишь абсолютным величинам; единичный вектор—указывает только направление. Если, например, скорость пули равна 400 мет./сек. и образует углы φ и ϑ с неподвижными осями координат, то мы говорим, что единичный вектор — равный по своей абсолютной величине 1, дает направление (φ, ϑ) этой скорости, в то время, как сама скорость равна по своей абсолютной величине 400 метр./сек.

Для того, чтобы иметь возможность легко отличать в формулах единичный вектор, мы будем единичные векторы отмечать чертой над буквой, напр. $\bar{\mathfrak{a}}$.

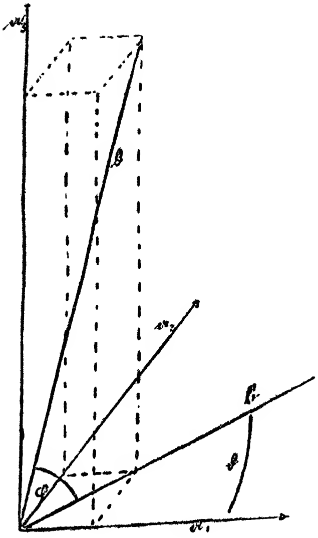
§ 4. Разложение векторов.

Для того, чтобы дать направление вектору, или изображающему его отрезку, мы должны связать положение вектора двумя произвольно выбранными направлениями в пространстве.

Мы устанавливаем два таких постоянных направления посредством единичных векторов $\bar{\mathfrak{a}}_1$ и $\bar{\mathfrak{a}}_2$. В таком случае направление вектора $\mathfrak{b}$ дано углом между $\mathfrak{b}$ и прямоугольной или косоугольной проекцией его $\mathfrak{b}'$ на плоскость $\bar{\mathfrak{a}}_1$, $\bar{\mathfrak{a}}_2$, а также углом ϑ, образуемым этой прекцией с одним из двух векторов $\mathfrak{a}_1$, или $\mathfrak{a}_2$. Для полного определения вектора $\mathfrak{b}$ необходимо знать его абсолютную величину (черт. 4).

Вместо этих трех данных $(\varphi, \vartheta, |\mathfrak{b}|)$, мы можем на основании трех векторов взять три других. Пусть, помимо двух направлений $\bar{\mathfrak{a}}_1$ и $\bar{\mathfrak{a}}_2$, дано третье $\bar{\mathfrak{a}}_3$, не компланарное с $\bar{\mathfrak{a}}_1$ и $\bar{\mathfrak{a}}_2$ (не в одной и той же плоскости). На черт. 4 это направление проходит через плоскость, определяемую вектором $\mathfrak{b}$ и его проекцией $\mathfrak{b}'$. Через конечную точку $\mathfrak{b}$ проводим три плоскости параллельно плоскостям $\bar{\mathfrak{a}}_1$, $\bar{\mathfrak{a}}_2$; $\bar{\mathfrak{a}}_2$, $\bar{\mathfrak{a}}_3$; $\bar{\mathfrak{a}}_3$, $\bar{\mathfrak{a}}_1$; в этом случае $\mathfrak{b}$ является диагональю ромбоэдра, ребра которого параллельны трем осям; и, следовательно, вектор $\mathfrak{b}$ может быть определен тремя единичными векторами $\bar{\mathfrak{a}}_1$, $\bar{\mathfrak{a}}_2$, $\bar{\mathfrak{a}}_3$, умноженными на скалярные величины. Согласно § 3, эта диагональ равна сумме трех сторон, т. е. $\mathfrak{b} = b_1 \overline{\mathfrak{a}_1} + b_2 \overline{\mathfrak{a}_2} + b_3 \overline{\mathfrak{a}_3}$. Отсюда следует, что любой вектор вполне определяется тремя не компланарными произвольно взятыми единичными векторами — двумя же только тогда, когда данный вектор находится в одной и той же плоскости с обоими единичными векторами, напр., $b_1 = 0$; следовательно,

$$\mathfrak{b} = b_2 \overline{\mathfrak{a}_2} + b_3 \overline{\mathfrak{a}_3}.$$



Черт. 4.

Условие компланарности трех векторов — когда один из векторов совпадает в направлении с единичным вектором, например, $b_1 = b_2 = 0$; таким образом, условие коллинеарности есть

$$\mathfrak{b} = b_3 \overline{\mathfrak{a}_3}.$$

Три проекции вектора называются его компонентами; и можем сказать:

для полного определения вектора $\mathfrak{b}$ в пространстве необходимо и достаточно задание его тремя его компонентами по трем наперед данным произвольно выбранным некомпланарным между собой направлениям.

Как частный случай отсюда, мы можем рассматривать задание вектора его компонентами по трем взаимно перпендикулярным направлениям, иначе говоря — представление вектора в прямоугольной системе координат. Единичные векторы, направленные по трем произвольно выбранным взаимно перпендикулярным осям, мы постоянно будем обозначать через буквы $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ (при наличии нескольких систем координат — через $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ и т. д.), Следовательно, каждый вектор может быть представлен в виде

$$\mathfrak{b} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k},$$

где x, y, z обозначают скаларные величины.

Нахождение самих скаларных величин, или компонент, по 3 произвольно выбранным няправлениям $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$, или $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ будет показано ниже (§ 7 и § 14).

§ 5. Уравнения с векторами.

Из приведенных рассуждений получаем следующие, теоремы:

1. Два вектора равны между собой только тогда когда соответственно попарно равны три определяющие их элемента. Одно линейное уравнение между векторами равносильно трем уравнениям между скаларными величинами, т. е. эквивалентно трем обычным алгебраическим уравнениям.

2. Уравнение

$$\mathfrak{a}_1 = x\mathfrak{a}_2 + y\mathfrak{a}_3$$

при переменных x и y в векторно-аналитическом представлении изображает собой плоскость, в которой находятся оба вектора $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$, т. к. оно представляет собой совокупность всех прямых, проведенных в этой плоскости.

Уравнение

$$\mathfrak{a}_1 = x\mathfrak{a}_2 + y\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{a}_4$$

представляет собой плоскость, параллельную векторам $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$, проходящую через конечную точку $\mathfrak{a}_4$.

3. Уравнение

$$\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 + x\,\mathfrak{a}_3$$

есть выражение прямой, параллельной $\mathfrak{a}_3$, проходящей через конечную точку $\mathfrak{a}_2$.

4. Конечные точки трех (четырех) векторов, исходящих из одной и той же точки, лежат на одной прямой (плоскости), если между тремя (четырьмя) векторами существует линейное уравнение, в котором суммы всех векторных коэффициентов по обоим сторонам знака равенства между собой равны.

Действительно, если конечная точка $\mathfrak{a}_1$ находится на прямой, проходящей через конечные точки $\mathfrak{a}_2$ и $\mathfrak{a}_3$ (для плоскости через конечные точки $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_4$), то

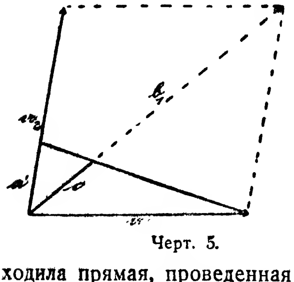
$$x(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_3) = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_3 \quad \text{или} \quad x(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_4) + y(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_4) = \mathfrak{a}_1 - \mathfrak{a}_4.$$

Пример: Требуется показать, что диагональ параллелограмма делится в отношении $n:1$ линией, проведенной из одной из вершин параллелограмма в точку $(n-1)$-го деления противоположной стороны.

Из черт. 5 следует

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{n-1}\,\mathfrak{a}_2$$

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{x}\,\mathfrak{b}_1.$$



Черт. 5.

Согласно сказанному выше

$$\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$$

или

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1 + (n-1)\,\mathfrak{a}'.$$

Так как конечная точка $\mathfrak{c}$ должна быть выбрана так, чтобы через нее проходила прямая, проведенная через конечные точки $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_1'$, то согласно только что сказанной теореме,

$$x = 1 + (n-1) = n,$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Умножение векторов.

Перемножение скалярных величин между собой или на векторы производится по правилам обычной алгебры (сравни § 3), причем здесь действительны, как коммутативный так и ассоциативный законы, т. е.

$$m(n\mathfrak{a}) = n(m\mathfrak{a}) = (mn)\mathfrak{a},$$

а также и закон дистрибутивный, т. е.

$$m(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = m\mathfrak{a} + m\mathfrak{b}$$

и

$$(m+n)\mathfrak{a} = m\mathfrak{a} + n\mathfrak{a}.$$

Перемножение векторов между собой совершается по иным правилам. Для их вывода мы воспользуемся примерами. В некоторых случаях нам уже известно произведение векторов; если мы рассмотрим наиболее характерные случаи, то сможем вывести общие правила.

1. Произведение силы $\mathfrak{P}$, данной по величине и по направлению, на путь $\mathfrak{s}$, заданный точно так же, как и сила $\mathfrak{P}$, действующая вдоль этого пути, определяет, как известно, величину произведенной работы

$$A = Ps\cos(\mathfrak{P}, \mathfrak{s}).$$

2. Произведение силы $\mathfrak{P}$, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной точки на расстоянии $\mathfrak{r}$ от последней, определяет собой вектор — статический момент $\mathfrak{M}$, абсолютная величина которого

$$M = Pr\sin(\mathfrak{P}, \mathfrak{r}),$$

а направление перпендикулярно к плоскости $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{r}$; оно берется при этом так, чтобы кратчайшее вращение направлеиия силы в направление: точка приложения ——> точка вращения, наблюдаемое с положительной стороны оси вращения происходило против движения часовой стрелки, т. е. согласно сказанному в § 1.

Из первого примера следует:

произведение двух векторов может быть скалярной величиной, равной произведению абсолютных величин обоих векторов, умноженному на конус угла между этими векторами, или — равно произведению абсолютной величины одного вектора на проекцию другого на направление первого.

Из второго примера следует:

Произведение двух векторов может дать новый вектор, абсолютная величина которого равна величине площади параллелограмма, сторонами которого служат эти векторы; направление нового вектора перпендикулярно к плоскости, в которой находятся перемножаемые векторы, и берется при этом с той стороны плоскости, смотря с которой кратчайшее вращение первого из заданных для перемножения векторов в направлении второго происходило против движения часовой стрелки.

Таким образом мы различаем два рода произведений векторов.

Произведение первого рода называется **скалярным**[1]) и для его обозначения пишут символически $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, или $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, или же $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, произведение второго рода назы-

---

[1]) Это обозначение дано Гамильтоном; он применял для отрицательной величины символ

$$S\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = -|\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b});$$

Грасман называл такое произведение внутренним и писал $[\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}]$. Джнбэ говорит „*direct product*" или „*dot product*", $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ или $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$; Хивизид пишет $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$.

вается **векторным** и обозначается его символами $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$, или $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ или же $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.[1])

§ 7. Скаларное произведение.

1. Из определения скаларного произведения

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = |\mathfrak{a}| \cdot |\mathfrak{b}| \cdot \cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

следует непосредственно коммутативный закон

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{a}, \tag{1}$$

так как

$$\cos(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \cos(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}).$$

При умножении на скаларные величины действителен дистрибутивный закон, т. е.

$$(x\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{b} = x\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = x\,|\,\mathfrak{a}\,| \cdot |\,\mathfrak{b}\,| \cdot \cos(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}),$$

так как закон дистрибутивный имеет силу при перемножении абсолютных величин по правилам алгебры. Наконец, из определения скаларного произведения, а также и в силу того, что сумма проекций отрезков на какой-либо отрезок равна проекции суммы отрезков, получаем тожество

$$(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})\,\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{c} + \mathfrak{b}\,\mathfrak{c},$$

дающую дистрибутивный закон для скаларного умножения.

2. Скаларное произведение вектора на единичный вектор — является ни чем иным как проекцией этого вектора на единичный вектор. Отсюда следуют важные выводы. Скаларное произведение двух единичных векторов есть косинус угла, заключенного между их направлениями. Оно равно нулю, если эти векторы образуют прямой угол.

---

[1]) Грассман: внешнее произведение, $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$; Гамильтон: векториальной частью произведения кватернионов, $V\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$; Джибс: векторное произведение, или „*skew product*,„ или „*cross product*", $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

Чтобы не впасть в противоречие с основными правилами алгебры, по которым произведение обращается в нуль лишь, когда один из сомножителей равен нулю, нам необходимо вспомнить что знак $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ есть только символ, а вовсе не обозначает произведения обоих величин $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Этот символ указывает что дается произведение одного отрезка на проекцию второго на первый.

Уравнение

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = 0, \tag{2}$$

связывающее векторы с конечными значениями служит выражением того, что векторы взаимно перпендикулярны. Если направления векторов совпадают, то скаларное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин. В особенности необхидимо отметить

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}^2. \tag{3}$$

Отсюда для взаимно перпендикулярных единичных векторов получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} \mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 1, \\ \mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{j}\mathfrak{k} = \mathfrak{k}\mathfrak{i} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Еели векторы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ выражены через единичные векторы $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$

$$\begin{cases} \mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}, \\ \mathfrak{b} = b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k}, \end{cases} \tag{5}$$

то на основании уравнений (4), и на основании дистрибутивного закона можно при умножении на скаларные величины написать произведение в следующем виде;

$$\begin{gathered} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ \mathfrak{a}^2 = a^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{gathered} \tag{6}$$

Абсолютная величина a вектора $\mathfrak{a}$ может быть выражена через компоненты следующим образом;

$$|\mathfrak{a}| = a = +\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \tag{7}$$

Умножая уравнения (5) единичный вектор $\mathfrak{i}$ (а также $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$), получаем

$$(8)\qquad \begin{cases} a_1 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{i} = a\cos(\mathfrak{a},\mathfrak{i}), \\ a_2 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{j} = a\cos(\mathfrak{a},\mathfrak{j}) \\ a_3 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{k} = a\cos(\mathfrak{a},\mathfrak{k}), \end{cases}$$

откуда нетрудно видеть, что величины этих скаларных компонентов являются произведениями абсолютных значений векторов на направляющий косинус.

Если векторы выражены посредством трех не находящихся в одной и той же плоскости векторов $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ косоугольной системы координат, т. е., если

$$\mathfrak{a} = a_1\,\mathfrak{l} + a_2\,\mathfrak{m} + a_3\,\mathfrak{n},$$
$$\mathfrak{b} = b_1\,\mathfrak{l} + b_2\,\mathfrak{m} + b_3\,\mathfrak{n},$$

то произведение принимает вид.

$$(9)\qquad \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)\,\mathfrak{m}\,\mathfrak{l} + $$
$$+ (a_2 b_3 + b_2 a_3)\,\mathfrak{n}\,\mathfrak{m} + (a_3 b_1 + b_3 a_1)\,\mathfrak{l}\,\mathfrak{n},$$

Другое выражение, мы будем иметь в § 15 уравн. (11).

§ 9. Применения.

1. Из трехугольника (черт. 6) имеем

$$(1)\qquad \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} = 0,$$

или

$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^2 + 2\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} + \mathfrak{c}^2;$$

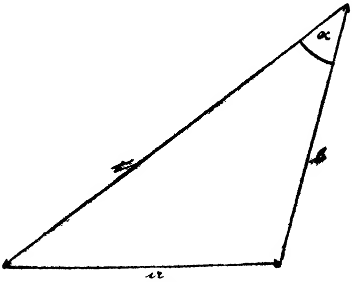
переводя на язык обычного анализа, получаем теорему для определения стороны трехугольника по данным двум сторонам и углу между ними

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c\cos(180^0 - \alpha) = b^2 + c^2\ \ 2\,b\,c\cos\alpha.$$

2. Умножая уравнение (1) на единичный вектор для $\mathfrak{a}$ получаем известную формулу

$$-a = b\cos(b\ a) + c\cos(\mathfrak{c}\ a)$$

3. В любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна удвоенной сумме непараллельных сторон



Черт. 6.

$$\mathfrak{c}^2 = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b})^2;$$
$$\mathfrak{d}^2 = (\mathfrak{a} - \mathfrak{b})^2;$$
$$\mathfrak{c}^2 + \mathfrak{d}^2 = 2(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2);$$

и, следовательно,

$$\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{d}^2 = 4\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b};$$

§ 9 Векторное произведение.

Пример, приведенный для вывода определения, показывает, как и само определение, что выше упомянутые осевые векторы могут рассматриваться, как призведение двух полярных векторов—и обратно, если, конечно, из самого задания этих осевых векторов уже не определены однозначно оба полярных вектора.

Согласно векторно-аналитическому способу изображения, векторное произведение пишется

(1) $$\mathfrak{c} = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = a\, b \sin(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\, \overline{\mathfrak{c}};$$

где $\overline{\mathfrak{c}}$ является единичным вектором, направленным перпендикулярно к плоскости векторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, и при том так, что кратчайшее вращение вектора $\mathfrak{a}$ в направление $\mathfrak{b}$ совершается, согласно выше-упомянутому определению в положительном направлении. Вектор $\mathfrak{c}$ определяет по величине и направлению параллелограмм и является в случае, когда векторы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ полярны, осевым вектором[1])

1. Так как

$$\sin(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = -\sin(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}),$$

то, следовательно, для этого произведения не имеет силы дистрибутивный закон

(2) $$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = -[\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}[.$$

Так как умножение на скаларную величину есть действие производимое над абсолютной величиной вектора безотносительно к его направлению, то в данном случае действителен дистрибутивный закон, и мы имеем

$$[x\,\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}, x\,\mathfrak{b}] = x\,\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$$

Действителен точно также дистрибутивный закон для векторного произведения нескольких векторов, потому что

(3) $$[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{c}] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{c}] + [\mathfrak{b}, \mathfrak{c}].$$

Первый случай. Пусть $\mathfrak{c}$ не компланарен с $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. Положим $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$. Для упрощения возьмем $\mathfrak{c}$ как единичный вектор; в таком случае вектор $[\mathfrak{d}, \mathfrak{c}]$ равен по своей абсолютной величине (ср. черт. 7)

$$|[\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}]| = d\sin(\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}) \equiv d';$$

и точно также

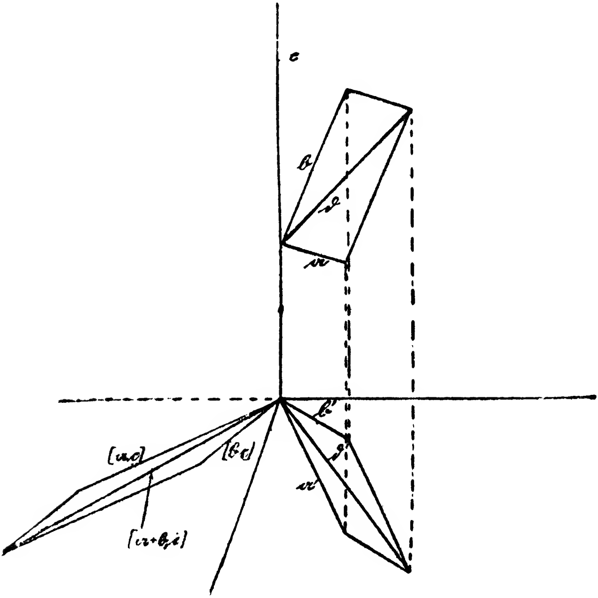
$$|[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}]| = a\sin(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}) \equiv a',$$

$$|\mathfrak{b}[\,\mathfrak{c}]| = b\sin(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) \equiv b'.$$

---

[1]) В данном случае часто дают обозначение „планарная величина", под которой подразумевают часть плоскости с определенным направлением вращения образованной векторами $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$; вертикальный вектор $\mathfrak{c}$ называют при этом „дополнением к планарной величине.

Направления этих трех векторов перпендикулярны к параллелограммам: $(\mathfrak{d}\,\mathfrak{c})$; $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})$; $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$. Величины d', a', b'. равны абсолютным величинам $\mathfrak{d}'\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'$ проекций векторов $\mathfrak{d}'\,\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathfrak{s}$; так



Черт. 7.

как векторы $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, -\mathfrak{d}$ образуют замкнутый треугольник, то и их проекции на одну и ту же плоскость образуют также замкнутый треугольник, и мы имеем

$$\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}' = \mathfrak{d}'.$$

Если повернуть наш треугольник вокруг $\mathfrak{c}$, как вокруг оси-вращения, на 90^0, то стороны $\mathfrak{d}', \mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ совпадут по величине и по направлению с векторами

$$[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{c}], [\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}], [\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}],$$

и таким образом, мы получаем доказательство правильности дистрибутивного закона для первого случая.

Второй случай. Векторы, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ находятся в одной плоскости, следовательно, направления векторов $[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$; $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}]$ $[\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]$ параллельны, почему мы имеем для абсолютных величин, равных величинам площадей параллелограммов $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$, $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ соотношение.

$$|[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}]| + |[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]| = |[\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{c}]|,$$

таким образом,

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}] + [\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}] = [\mathfrak{a}+\mathfrak{b}, \mathfrak{c}].$$

2. Величина площади параллелограмма $a\,b \sin\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, при условии параллельности сторон $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, равна нулю, т. к. $\sin 0^0 = 0$ и таким образом выражение.

$$[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = 0 \tag{4}$$

может рассматриваться, как условие параллельности двух векторов. Наоборот, абсолютная величина произведения перпендикулярных друг к другу векторов равна произведению их абсолютных величин.

Отсюда для взаимно перпендикулярных трех основных векторов имеем:

$$(5)\left\{\begin{array}{c} [\mathfrak{i}\,\mathfrak{i}] = [\mathfrak{j}\,\mathfrak{j}] = [\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}] = 0, \\ [\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}] = -[\mathfrak{j}\,\mathfrak{i}] = \mathfrak{k}, [\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}] = -[\mathfrak{k}\,\mathfrak{j}] = \mathfrak{i}, [\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}] = -[\mathfrak{i}\,\mathfrak{k}] = \mathfrak{j}, \end{array}\right.$$

Произведение двух векторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, выраженных через единичные векторы, может быть представлено в виде детерминанта:

(6)
$$
\begin{aligned}
[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] &= [\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}]\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\
&+ [\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}]\,(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\
&+ [\mathfrak{k}\,\mathfrak{i}]\,(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\
&= \mathfrak{k}\,(a_1 b_2 - a_2 b_1) = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \\
&+ \mathfrak{i}\,(a_2 b_3 - a_3 b_2) \\
&+ \mathfrak{j}\,(a_3 b_1 - a_1 b_3)
\end{aligned}
$$

Миноры этого детерминанта дают нам проекции параллелограмма на плоскости $\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}, \mathfrak{k}\,\mathfrak{i}, \mathfrak{i}\,\mathfrak{j}$, определяемого вектором $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ как по величине, так и по направлению.

§ 10. Применения к статике.

Мы будем основываться на примере, приведенном в § 1. Система сил $\mathfrak{P}_1 \ldots \mathfrak{P}_n$, приложенных в точках $p_1 \ldots p_n$ свободного твердого тела, находится в равновесии, если равнодействующая сила и результирующий статический момент, взятый относительно начала координат, равны нулю.

Таким образом, условия равновесия гласят:

(1) $$\Sigma\, \mathfrak{P}_i = 0,$$

(2) $$\Sigma\, [\mathfrak{p}_i\, \mathfrak{P}_i] = 0,$$

где $\mathfrak{p}_i$ обозначает радиус-вектор точки p_i относительно произвольно выбранного начала координат O. Если равновесия нет, то $\Sigma\, \mathfrak{P}_i$, а также $\Sigma\, [\mathfrak{p}_i\, \mathfrak{P}_i]$, дают приложенную в точки O равнодействующую и результирующий статический момент относительно точки O.

Перемена точки, относительно которой берется момент, изменяет в общем случае $\Sigma\, [\mathfrak{p}_i\, \mathfrak{P}_i]$; пусть посредством вектора $\mathfrak{a}$ дано нам новое начало координат O, причем вектор $\mathfrak{a}$ направлен от O к O'; тогда

(3) $$\Sigma\, [\mathfrak{p}_i\, \mathfrak{P}_i] = + \Sigma\, [\mathfrak{a}\, \mathfrak{P}_i] + \Sigma\, [\mathfrak{p}'_i\, \mathfrak{P}_i],$$

где $\mathfrak{p}'_i$ относится к новому началу системы координат O'. Если $\mathfrak{a}$ берется так, что

$$\Sigma\, [\mathfrak{a}\, \mathfrak{P}_i] = [\mathfrak{a}\, \Sigma\, \mathfrak{P}_i] = 0,$$

т. е., если $\mathfrak{a}$ совпадает с направлением равнодействующей, то статический момент, взятый относительно нового начала координат O', равен статическому моменту, взятому относительно старого начало O. Мы имеем таким образом: **точка, относительно которой берется статический момент, может быть перенесена в направлении равнодействующей, без изменения величины и направления статического момента.**

Если к телу, могущему вращаться вокруг неподвижной точки O', приложить в точке O' новую силу $\mathfrak{R}$ любой величины и направления, то равновесие системы не изменится. Возьмем точку O' за начало координат и напишем условия равновесия:

$$\Sigma \mathfrak{P}_i + \mathfrak{R} = 0$$
$$\Sigma [\mathfrak{p}'_i, \mathfrak{P}_i] + [0, \mathfrak{R}] = 0.$$

Сила $\mathfrak{R}$ может быть всегда выбрана так, чтобы удовлетворялось первое условие; другими словами, $\Sigma \mathfrak{P}_i$ может принимать любое значение. Таким образом, **для существования равновесия системы остается лишь второе условие:**

$$\Sigma [\mathfrak{p}'_i \mathfrak{P}_i] = 0.$$

Если тело закреплено в двух точках O и O', т. е., если оно может вращаться вокруг оси $O\,O' = \mathfrak{a}$, то равновесие не изменится, если, в точках O и O' оси приложить новые силы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ любой величины и направления. Если взять точку O' за начало, то условия равновесия будут написаны так:

$$(4) \qquad \begin{cases} \Sigma \mathfrak{P}_i + \mathfrak{R} + \mathfrak{R}' = 0. \\ \Sigma [\mathfrak{p}_i - \mathfrak{a}, \mathfrak{P}_i] - [\mathfrak{a}, \mathfrak{R}] = 0. \end{cases}$$

Взамен второго уравнения, мы можем написать

$$\Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i - [\mathfrak{a}\, \Sigma \mathfrak{P}_i] - [\mathfrak{a}, \mathfrak{R}] = 0$$

или

$$(5) \qquad \Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i] + [\mathfrak{a}\, \mathfrak{R}'] = 0,$$

где $\mathfrak{R}'$ может быть взято произвольным. Но $[\mathfrak{a}\, \mathfrak{R}']$ есть вектор, перпендикулярный к $\mathfrak{a}$. Таким образом условие равновесия (5) требует, чтобы и величина $\Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i]$ была вектором, перпендикулярным к $\mathfrak{a}$. Так как уравнение (4_1) действительно вследствие свободы выбора $\mathfrak{R}$, то для равновесия сил, приложенных к телу, могущему вращаться вокруг неподвижной оси, необходимо чтобы результирующий момент приложенных сил $\mathfrak{M} = \Sigma\,[\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i]$ удовлетворял условию

$$(\mathfrak{M}\,\mathring{\mathfrak{a}}) = 0. \tag{6}$$

§ 11. Перемножение свыше двух векторов.

В § 3 мы различали два рода векторов — полярные и осевые. При определении векторного произведения указанное различие не было принято во внимание в силу замечания о том, что оно не влияет на вычисление. Так как в примерах приведенных для вывода определений, рассматривались произведения, составленные из полярных векторов, то для доказательства указанного замечания необходимо вкратце рассмотреть и другие комбинации. При этом мы выясним, имеют ли произведения различного рода векторов другое значение, и, кроме того, особо рассмотрим вопрос, являются ли эти произведения по своему характеру полярными, или осевыми. Простое соображение показывает — выводы же следующих параграфов подтвердят это — что произведение векторов постоянно дает осевые векторы (результат произведения не зависит от изменения направления осей координат), если все сомножители, или, по крайней мере, четное их число, являются полярными векторами (т. е., меняют знак в зависимости от изменения знака осей координат). Поэтому, а также и в силу того, что осевой вектор, вообще говоря, может быть рассматриваем, как произведение двух полярных векторов, мы можем произведение двух векторов, из которых, по крайней мере, один является осевым, рассматривать, как произведение свыше чем двух полярных векторов.

§ 12. Скаларное произведение полярного и осевого вектора, или $\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$.

Осевой вектор определяется величиной параллелограмма и направлением нормали этого параллелограмма. Произведение осевого вектора на полярный равно площади этого параллелограмма, умноженной на проекцию полярного вектора на нормаль, т. е. равно об'ему параллелопипеда, построенного на этом параллелограмме, как на основании, и имеющего третьим ребром полярный вектор. Мы можем символически обозначить осевой вектор через $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$, и, следовательно, произведение из полярного и осевого векторов принимает вид

$$\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}],$$

где $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}$ являются полярными векторами. Если, с другой стороны, дано не произведение $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$, как осевой вектор, а заданы сами векторы $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{b}$, то скаларное произведение $\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ равно об'ему параллелопипеда со сторонами $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Если изменить все направления, к которым отнесены векторы, то полярный вектор $\mathfrak{c}$ меняет свой знак в то время, как осевой его удерживает. Следовательно, произведение $\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ также меняет свой знак; таким образом, если произведение рассматривается, как скаларное, все же оно до некоторой степени находится в зависимости от направления. Подобные скаларные величины, меняющие свой знак на обратный при изменении основных направлений, называются п с е в д о с к а л а р н ы м и[1]). Перемножение полярного вектора на псевдоскалар должно, в силу сказанного, дать осевой вектор.

---

[1]) Клейн и Темердинг различают оба случая посредством обозначений: скалар первого и скалар второго рода.

При циклическом перемещении направления осей знак не меняется, и мы имеем:

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = \mathfrak{b}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}] = \mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}] \\ = -\,\mathfrak{c}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}] = -\,\mathfrak{a}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}] = -\,\mathfrak{b}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}]\,. \end{cases}$$

В этих выражениях можно, не опасаясь неправильного толкования, совершенно опустить скобки и — как это часто делают — писать

$$\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = \mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = -\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}.$$

Если три вектора даны своими компонентами по основным векторам $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$, то скалярное произведение может быть выражено в форме детерминанта:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ибо компоненты осевого вектора $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ являются минорами этого детерминанта, и скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений компонентов.

Если $\mathfrak{c}$ находится в плоскости $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, то об'ем параллелопипеда, образованного тремя векторами, равен нулю, т. е. $\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = 0$. Сказанное непосредственно следует из вычисления, если $\mathfrak{c}$ выразить через векторы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, что вполне возможно в случае компланарности. Пусть

$$\mathfrak{c} = x\,\mathfrak{a} + y\,\mathfrak{b}\,,$$

тогда произведение выразится в виде:

$$x\,\mathfrak{a}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] + y\,\mathfrak{b}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = x\,\mathfrak{b}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}] + y\,\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}] = 0\,.$$

Интересным примером такого скалярного произведения трех векторов служит, так называемый, векторный поток через какую-либо поверхность. Количество воды, протекающее в единицу времени через любую по величине и положению поверхность, равно об'ему цилиндра, основанием которого служит эта площадь, а образующая равна по величине и направлению скорости в данном месте. Если основанием служит параллелограмм $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$, то количество воды, протекающее в единицу времени дается скалярным произведением

$$\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,.$$

Это произведение называется потоком, истечением вектора $\mathfrak{c}$, потоком скоростей через плоскость. Если $\mathfrak{c}$ является вектором, представляющим собой силу, то принято говорить о силовом потоке; если, например, даны две заряженные противоположным электричеством, бесконечно большие плоские поверхности, расположенные параллельно друг другу так, что в свободном пространстве между ними образуется электрическое поле силы $\mathfrak{c}$, то есть, что на равный единице, положительно заряженный полюс в любой точке поля действует сила $\mathfrak{c}$ —, то силовой поток через любым образом расположенную поверхность, $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$ определяется скалярным произведением $\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$. Числовое значение этой величины называется числом силовых линий, или числом линий потока, проходящих через поверхность в данном направлении.

§ 13. Векторное произведение полярного и осевого вектора или $[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]]$.

Согласно определению векторного произведения, оно представляется вектором, расположенным перпендикулярно к плоскости проходящей через векторы — сомножители, а в данном случае—через нормаль к параллелограмму, образованному векторами $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$, и через полярный вектор $\mathfrak{a}$. Во всяком случае, он должен находиться в плоскости параллелограмма $(\mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ и выразиться через

$$[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]] = x\,\mathfrak{b} + y\,\mathfrak{c}\,. \tag{1}$$

Для нахождения x и y вычисляем левую сторону уравнения, применяя представления векторных компонентов. Для упрощения вычисления берем единичный вектор $\mathfrak{i}$ в направлении вектора $\mathfrak{c}$, а вектор $\mathfrak{j}$ — в плоскости $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$; тогда

$$\mathfrak{c} = c_1 \mathfrak{i},$$
$$\mathfrak{b} = b_1 \mathfrak{i} + b_2 \mathfrak{j},$$
$$\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{i} + a_2 \mathfrak{j} + a_3 \mathfrak{k},$$

и таким образом,

$$[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]] = -c_1 b_2 [\mathfrak{a}\,\mathfrak{k}] = -c_1 b_2 (a_2 \mathfrak{i} - a_1 \mathfrak{j}).$$

Правая сторона последнего уравнения должна выражаться формой $x\mathfrak{b} + y\mathfrak{c}$, т. е., мы должны иметь

$$x\, b_1 \mathfrak{i} + x\, b_2 \mathfrak{j} + y\, c_1 \mathfrak{i} = -c_1 b_2 a_2 \mathfrak{i} + c_1 b_2 a_1 \mathfrak{j},$$

откуда

$$x = c_1 a_1 = (\mathfrak{c}\mathfrak{a}),$$
$$y = -a_2 b_2 - b_1 a_1 = -(\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}).$$

Таким образом, векторное произведение трех векторов $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, принимает вид

$$[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]] = (\mathfrak{c}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{b} - (\mathfrak{b}\,\mathfrak{a})\,\mathfrak{c}. \tag{2}$$

Отсюда следует соотношение

$$[[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]] + [\mathfrak{b}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]] + [\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]] = 0.$$

В правой части уравнения (2) дана разность двух полярных векторов, умноженных на произвольные скалары. Поэтому векторное произведение трех полярных векторов, или из одного полярного и одного осевого, должно быть полярным вектором.

§ 14. Произведение двух осевых векторов. Обратный тройной вектор.

1. Скаларное произведение двух осевых векторов, или $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]$.

Для того, чтобы это выражение привести к произведению полярных векторов, положим $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = \mathfrak{e}$; тогда, согласно сказанному в двух последних параграфах, следует:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}] &= \mathfrak{e}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}] = \mathfrak{d}\,[\mathfrak{e}\,\mathfrak{c}] \\
&= \mathfrak{d}\,[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{c}] \\
&= \mathfrak{d}\,\{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{b} - (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,\mathfrak{a}\} \\
&= (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}) - (\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{d})\,.
\end{aligned}
$$

В последнем выражении мы имеем направо разность двух произведений скалярных величин; таким образом скалярное произведение двух осевых векторов не является псевдоскаларом.

2. Векторное произведение двух осевых векторов, или $[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]]$.

Положим снова $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] = \mathfrak{e}$; тогда

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad [[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]]\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}] &= [\,\mathfrak{e}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}\,]] \\
&= \mathfrak{c}\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{d}) - \mathfrak{d}\,(\mathfrak{e}\,\mathfrak{c}) \\
&= \mathfrak{c}\,([\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{d}) - \mathfrak{d}\,([\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{c})\,.
\end{aligned}
$$

Здесь перемножены полярные векторы $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$ с псевдоскаларами, и, следовательно, разность должна представлять собой осевой вектор. Обобщая, мы можем сказать:

Векторное произведение двух полярных, или двух осевых, векторов представляет собой снова осевой вектор, векторное же произведение полярного и осевого вектора представляет собой полярный вектор.

Так как

$$[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]] = -\,[[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]]\,,$$

то

$$(3) \qquad [[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]] = -\,\mathfrak{a}\,([\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]\,\mathfrak{b}) + \mathfrak{b}\,([\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]\,\mathfrak{a})\,.$$

Отсюда получаем весьма существенные соотношения между 4 векторами, из числа которых 3 не находятся в одной и той же плоскости:

$$-\,\mathfrak{d}\,([\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\,([\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}]\,\mathfrak{b}) + \mathfrak{b}\,([\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]\,\mathfrak{a}) + \mathfrak{c}\,([\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{d});$$

или — так как $([\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\,\mathfrak{c})$ является скалярной величиной, а векторы могут быть делимы на скалярные величины — после деления имеем:

$$(4) \qquad -\mathfrak{d} = \mathfrak{a}\frac{\mathfrak{b}\,[\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}]}{\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]} + \mathfrak{b}\frac{\mathfrak{a}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{d}]}{\mathfrak{c}\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]} + \mathfrak{c}\,\frac{\mathfrak{d}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}]}{\mathfrak{c}\,\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}.$$

3. Наконец, необходимо особо упомянуть, что при комбинации $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$, примененной уже в §§ 13 и 14, требуется обращать внимание на скобки потому что в то время, как вектор $\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$ представляет собой величину

$$a\,b\,c\,cos\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$$

и имеет направление вектора $\mathfrak{a}$, произведение $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})$ является ни чем иным, как скалярной величиной. Векторы

$$\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}) \text{ и } (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{c}$$

представляют собой совершено различные величины.

4. Уравнение (4), или

$$(5) \qquad \mathfrak{d} = \mathfrak{a}\frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}} + \mathfrak{b}\frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}} + \mathfrak{c}\frac{\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}$$

имеет в силу этого особое значение, так как оно дает правило, согласно которому компоненты вектора $\mathfrak{d}$ определяются по трем произвольно выбранным не проходящим через одну и ту же плоскость направлениям $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. Для получения этих компонентов мы должны взять

$$(6) \qquad \frac{[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}', \frac{[\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}]}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}} = \mathfrak{b}', \frac{[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}'$$

и умножить скалар на $\mathfrak{d}$. Уравнение (3) или, вводя сокращения (6), уравнение

$$(5') \qquad \mathfrak{d} = (\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}')\,\mathfrak{a} + (\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}')\,\mathfrak{b} + (\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}')\,\mathfrak{c}$$

пишется также в виде

$$(7) \qquad \mathfrak{d} = \mathfrak{d}\,(\mathfrak{a}';\mathfrak{a} + \mathfrak{b}';\mathfrak{b} + \mathfrak{c}';\mathfrak{c}),$$

причем символическое выражение в скобках называется тензором, или полной диадой, и притом — потому что умноженное на вектор $\mathfrak{d}$ оно дает величину самого вектора $\mathfrak{d}$ — единичный тензор, или идентичную диаду (сравни §§ 44 и 48.

Нетрудно видеть, что векторы $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ служат нормалями к плоскостям $\mathfrak{b}\mathfrak{c}, \mathfrak{c}\mathfrak{a}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}$; поэтому $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ называют по отношению к $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ „обратным тройным вектором“, обозначая:

$$(8) \qquad \begin{cases} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}\,\mathfrak{c}' = 0\,, \text{ и т. д.,} \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}' = \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}' = 1\,. \end{cases}$$

5. Отметим еше следующие формулы: пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ являются обратными векторами по отношению к $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}'$ и пусть

$$\mathfrak{d} = d_1\,\mathfrak{a} + d_2\,\mathfrak{b} + d_3\mathfrak{c} = d'_1\,\mathfrak{a}' + d'_2\,\mathfrak{b}' + d'_3\,\mathfrak{c}'$$

и
$$\mathfrak{e} = e_1\,\mathfrak{a} + e_2\,\mathfrak{b} + e_3\,\mathfrak{c} = e'_1\,\mathfrak{a}' + e'_2\,\mathfrak{b}' + e'_3\,\mathfrak{e}',$$

тогда

$$(9) \qquad [\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}] = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\{(d_2\,e_3 - d_3\,e_2)\,\mathfrak{a}' + (d_3\,e_1 - d_1\,e_3)\,\mathfrak{b}' + (d_1\,e_2 - d_2\,e_1)\,\mathfrak{c}'\}$$

$$(10) \qquad \mathfrak{a}\,[\mathfrak{d}\mathfrak{e}] = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,(d_2\,e_3 - d_3\,e_2)$$

$$(11) \qquad \mathfrak{d}\,\mathfrak{e} = d_1 e'_1 + d_2\,e'_2 + d_3\,e'_3 = d'_1\,e_1 + d'_2\,e_2 + d'_3\,e_3.$$

Формула (9) переходит в формулу (6) § 9, если $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ представляют собой три взаимно перпендикулярных единичных вектора.

§ 15. Дифференцирование вектора по скалярной величине.

Пусть в некотором векторном поле вектор $\mathfrak{a}$ отнесен к координатам x, y, z и представляет собой выражение свойств некоторой материальной точки $x\,y\,z$ пространства. Таким образом $\mathfrak{a}$ является функцией x, y, z. Пусть также вектор $\mathfrak{a}$ является и функцией времени t, этот вектор представлен в пространстве в момент времени $t = t_0$ по отношению к 3 осям $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ следующим образом:

$$\mathfrak{a} = a_1\,\mathfrak{i} + a_2\,\mathfrak{j} + a_3\,\mathfrak{k}\,.$$

Изменение вектора в течение промежутка времени $d\,t$ в той же точке пространства (x, y, z) выразится посредством

$$\frac{\partial\,\mathfrak{a}}{\partial\,t} = \frac{\partial a_1}{\partial\,t}\,\mathfrak{i} + \frac{\partial\,a_2}{\partial\,t}\,\mathfrak{j} + \frac{\partial a_3}{\partial\,t}\,\mathfrak{k},$$

так как изменение происходит в том же пространстве ввиду того, что оси $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ не зависят от времени. Это изменение является изменением в данной точке по времени, если при этом не принимать во внимание одновременного изменения положения x, y, z, о чем будет сказано ниже (§ 19).

При многократном дифференцировании получаем:

$$\frac{\partial^n \mathfrak{a}}{\partial t^n} = \frac{\partial^n a_1}{\partial t^n} \mathfrak{i} + \frac{\partial^n a_2}{\partial t^n} \mathfrak{j} + \frac{\partial^n a_3}{\partial t^n} \mathfrak{k}.$$

Дифференцирование произведения производится по известным правилам анализа, т. е.

$$\frac{d(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})}{dt} = \frac{1}{dt}\left\{(\mathfrak{a} + d\,\mathfrak{a})(\mathfrak{b} + d\,\mathfrak{b}) - \mathfrak{a}\mathfrak{b}\right\} = \frac{d\,\mathfrak{a}}{dt}\mathfrak{b} + \frac{d\,\mathfrak{b}}{dt}\mathfrak{a}$$

и

$$\frac{d\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]}{dt} = \frac{1}{dt}\left\{[(\mathfrak{a} + d\,\mathfrak{a})(\mathfrak{b} + d\,\mathfrak{b})] - [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\right\} =$$

$$= \left[\frac{d\,\mathfrak{a}}{dt}\mathfrak{b}\right] + \left[\mathfrak{a}\frac{d\,\mathfrak{b}}{dt}\right].$$

Последний случай необходимо согласовать с правилами перемножения векторов, т. е. необходимо обращать внимание на порядок следования сомножителей.

Подобным же образом из изменения компонентов можно вычислить изменение вектора $\mathfrak{a}$ при изменении какого-либо скаларного аргумента α; так наприм.,

$$\frac{\partial\,\mathfrak{a}}{\partial x} = \frac{\partial\,a_1}{\partial\,x}\mathfrak{i} + \frac{\partial\,a_2}{\partial\,x}\mathfrak{j} + \frac{\partial\,a_3}{\partial\,x}\mathfrak{k}.$$

2. Дифференциал единичного вектора $\overline{\mathfrak{a}}\,(t)$ по его скаларному аргументу есть также вектор перпендикулярный к основному вектору.

Так как дифференцирование условия, что a является единичным вектором, т. е. дифференцирование уравнения

$$\mathfrak{a}^2 = 1$$

по его скалярному аргументу дает

$$2\bar{\mathfrak{a}}\frac{d\bar{\mathfrak{a}}}{dt}=0.$$

Мы видим что $\bar{\mathfrak{a}}$ и $d\bar{\mathfrak{a}}$ являются двумя взаимно перпендикулярными векторами (это имеет силу лишь до тех пор, покуда величина единичного вектора остается единицей). В противоположность этому необходимо обратить внимание на формулу

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{a})\equiv\frac{d}{dt}(a\,\bar{\mathfrak{a}})=\bar{\mathfrak{a}}\,\frac{d\,a}{d\,t}+a\,\frac{d\bar{\mathfrak{a}}}{d\,t},$$

согласно которой $\bar{\mathfrak{a}}$ и $d\bar{\mathfrak{a}}$ перпендикулярны друг другу.

Таким образом, дифференциал вектора неизменяющейся длины по его аргументу, также перпендикулярен к самому вектору.

3. Если $\mathfrak{a}$ по величине и направлению является радиусом-вектором некоторой кривой, представленной в полярных координатах r и φ, так что

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_0+\Sigma\,d\,\mathfrak{a}\,,$$

то

$$d\,\mathfrak{a}=\bar{\mathfrak{a}}\,d\,a+a\,d\,\bar{\mathfrak{a}};$$

производя скалярное умножение, получаем

$$(d\,\mathfrak{a})^2=(d\,a)^2+a^2\,(d\,\bar{\mathfrak{a}})^2.$$

Аналогичная аналитическая формула гласит:

$$(d\,s)^2=(dr)^2+r^2\,(d\,\varphi)^2.$$

Отсюда следует

$$|\,d\bar{\mathfrak{a}}\,|=d\,\varphi\,,$$

т. е. $d\bar{\mathfrak{a}}$ является величиной изменения угла вектора $\mathfrak{a}$ относительно данного направления.

4. Если $\mathfrak{a}$ является вектором, определяющим положение системы в точке x, y, z, т. е.

$$\mathfrak{a}=x\,\mathfrak{i}+y\,\mathfrak{j}+z\,\mathfrak{k},$$

то

$$\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial x}=\mathfrak{i}, \quad \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial y}=\mathfrak{j}, \quad \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial z}=\mathfrak{k}.$$

Эти формулы определяют изменения вектора при переходе из точки x, y, z в точку $x+dx, y, z$, или $x, y+dy, z$, или $x, y, z+dz$, разделенные на соответствующее расстояние между новым и старым положением. Они равны единичным векторам тех направлений, к которым отнесены изменения $\mathfrak{a}$. Следовательно: изменение вектора $\mathfrak{a}$ в пространстве в наперед заданном направлении на единицу длины равно единичному вектору, совпадающему с этим направлением.

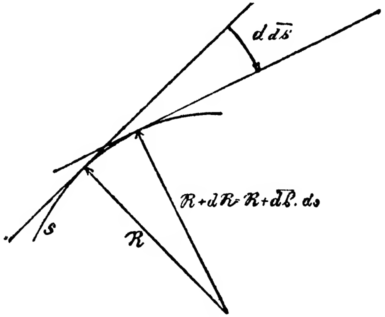
Если материальная точка (x, y, z) двигается по кривой $C=\Sigma d\mathfrak{s}$, и если положение этой точки дано длиной дуги s этой кривой, взятой от некоторой произвольно выбранной точки на этой же кривой, то абсолютная величина скорости точки равна $v=\frac{ds}{dt}$; направление скорости совпадает в любой момент с направлением элемента дуги кривой $d\mathfrak{s}$. Таким образом, скорость, т. е. изменение вектора $\mathfrak{a}$ по времени, дано по величине и направлению в единицу времени выражением

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt}=\frac{d\mathfrak{s}}{ds}\frac{ds}{dt}=\overline{d\mathfrak{s}}\,v=\mathfrak{v}.$$

Вектор ускорения определяется из

$$\mathfrak{b}=\frac{d\mathfrak{v}}{dt}=\frac{d\overline{d\mathfrak{s}}}{ds}v^2+\overline{d\mathfrak{s}}\frac{dv}{dt}.$$

Вектор $\frac{d\overline{d\mathfrak{s}}}{ds}$ есть дифференциал единичного вектора по его аргументу; направление этого вектора перпендикулярно к единичному вектору $\overline{d\mathfrak{s}}$; $d\overline{d\mathfrak{s}}$ дает изменение направления касательной при переходе из точки x, y, z в точку x_1, y_1, z_1, данной кривой (см. черт. 8). Нормали в плос-



Черт. 8.

кости радиуса кривизны к касательным в этих обоих точках пересекаются в центре кривизны. Векторное изменение радиуса кривизны при переходе из точки (x, y, z) в точку (x_1, y_1, z_1) выражается посредством

$$d\mathfrak{R} = d\mathfrak{s} = \overline{d\mathfrak{s}}\, d s$$

и направлено перпендикулярно к радиусу кривизны $\mathfrak{R}$ в точке (x, y, z); таким образом $d\,\overline{d\mathfrak{s}}$ параллельно $\mathfrak{R}$, но направлено противоположно. Из подобия векторных треугольников следует:

$$\frac{|d\,\overline{d\mathfrak{s}}|}{1} = \frac{ds}{|\mathfrak{R}|}.$$

Таким образом

$$\frac{d\,\overline{d\mathfrak{s}}}{ds} = -\frac{\overline{\mathfrak{R}}}{R}$$

и

$$\mathfrak{b} = -\mathfrak{R}\frac{v^2}{R} + \overline{d\mathfrak{s}}\frac{dv}{dt}.$$

Эта формула дает известное разложение ускорения на элемент, направленный по касательной $\frac{dv}{dt}$, и на элемент, нормальный к траектории $-\frac{v^2}{R}$.

§ 16. Теорема о наименьшем статическом моменте.

В применении к статике (§ 10) было показано, что величина и направление статического момента изменятся при перемене точки, относительно которой берется момент, т. е., точки приложения равнодействующей силы. Необходимо найти условие, согласно которому результирующий статический момент принимает наименьшую величину. Следовательно, необходимо найти такой вектор $\mathfrak{a}$, для которого абсолютная величина

$$(1) \qquad \mathfrak{K}' = \Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i] - \Sigma [\mathfrak{a} \mathfrak{P}_i]$$

принимает наименьшее значение. При скаларном умножении на $\mathfrak{K}'$ получаем

$$(2) \qquad \mathfrak{K}'^2 \Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i] \cdot \mathfrak{K}' + \mathfrak{a} \Sigma [\mathfrak{K}' \mathfrak{P}_i].$$

Если $\mathfrak{K}'$ принимает наименьшее значение, то его принимает также и $\mathfrak{K}'^2$. Для нахождения наименьшего значения $\mathfrak{K}'^2$ необходимо, чтобы приенение $\mathfrak{K}'^2$, при любом изменении вектора $\mathfrak{a}$ (по направлению, или величине) равнялось нулю.

Вычтем уравнение (2) из, уравнения, получаемого при приращении $\mathfrak{K}'$ на величину $d\mathfrak{K}'$, т. е., из уравнения

$$\mathfrak{K}'^2 + d\,\mathfrak{K}'^2 \equiv \mathfrak{K}'^2 + 2\,\mathfrak{K}'\,d\,\mathfrak{K}' = \Sigma [\mathfrak{p}_i \ \mathfrak{P}_i [\cdot (\mathfrak{K}' + d\,\mathfrak{K}') +$$
$$+ (\mathfrak{a} + d\,\mathfrak{a}) \Sigma [(\mathfrak{K}' + d\,\mathfrak{K}') \mathfrak{P}_i];$$

получаем

$$d\mathfrak{K}' \{ 2\,\mathfrak{K}' - \Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i] - [\mathfrak{a}\, \Sigma \mathfrak{P}_i] \} = d\,\mathfrak{a}\, [\mathfrak{K}'\, \Sigma \mathfrak{P}_i].$$

При наименьшем статическом моменте $\mathfrak{K}_m$ должен обращаться в нуль множитель при $d\mathfrak{a}$, т. е.,

$$(3) \qquad \Sigma [\mathfrak{K}_m \mathfrak{P}_i] = [\mathfrak{K}_m \Sigma \mathfrak{P}_i] = 0,$$

что обозначает, что направление результирующего наименьшего статического момента $\mathfrak{K}_m$ параллельно направлению равнодействующей силы.

Величина наименьшей результирующей момента определяется из величины и направления результирующего момента

$$\mathfrak{K} = \Sigma [\mathfrak{p}_i \mathfrak{P}_i],$$

где отрезки $\mathfrak{p}_i$ берутся от точки, относительно которой берется момент, умножая скаларно уравнение (1) на $\mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{P}_i$.

Из уравнения (1) следует: $\mathfrak{K}\mathfrak{R} = \mathfrak{K}'\mathfrak{R}$; или, заменяя $\mathfrak{K}'$ наименьшим моментом $\mathfrak{K}_m$ ($\mathfrak{K}_m$ и $\mathfrak{R}$ параллельны), получаем:

$$K_m R = \mathfrak{K}\mathfrak{R}, \text{ или } K_m = \mathfrak{K}\overline{\mathfrak{R}}.$$

Таким образом, если мы имеем систему сил, приложеных к твердому телу, дающих в результате приведения равнодействующую $\mathfrak{R}$ в произвольно взятой точке $\mathfrak{O}$ и результирующий статический момент, то наименьший результирующий статический момент равен по величине и направлению прямоугольной проекции $\mathfrak{K}$ на направление равнодействующей.

Для нахождения точки приложения равнодействующей для случая наименьшего момента мы производим в уравнении (1) замену $\mathfrak{K}'$ через $\mathfrak{K}_m$ и затем умножаем это уравнение векториально на $\mathfrak{R}$, причем получаем

$$0 = [\mathfrak{K}\mathfrak{R}] - [[\mathfrak{a}\mathfrak{R}]\mathfrak{R}],$$

или же

$$\mathfrak{a}\mathfrak{R}^2 = -[\mathfrak{K}\overline{\mathfrak{R}}] + \mathfrak{R}(\mathfrak{a}\mathfrak{R}),$$

$$\mathfrak{a} = -\frac{[\mathfrak{K}\mathfrak{R}]}{R} + \overline{\mathfrak{R}}(\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{R}}).$$

Следовательно, точку приложения можно передвигать не изменяя величины статического момента, в направлении равнодействующей силы, т. е. — вектор $\mathfrak{a}$ можно складывать с любым вектором, параллельным $\mathfrak{R}$, наприм.,—$\overline{\mathfrak{R}}(\mathfrak{a}\overline{\mathfrak{R}})$, не изменяя величины наименьшего момента. Итак, точка приложения равнодействующей силы, соответствующая наименьшему моменту, находится на направлении результирующей параллельных прямых, которая, в свою очередь, проходит через точку, определяемую вектором $\mathfrak{a}$, если вектор

$$\mathfrak{a} = -\frac{[\mathfrak{R}\mathfrak{M}]}{R}$$

и имеет начало в точке приложения $\mathfrak{R}$.

§ 17. Градиент скалярной функции.

Пусть $V(xyz)$ в точке x, y, z или близ нее есть постоянная скалярная функция x, y, z, т. е. является скалярной величиной зависящей, от положения точки x, y, z. В точке x, y, z эта функция не должна принимать максимальных и минимальных значений или иметь точку перегиба. Изменение функции V зависит от направлений, в которых изменяются x, y, z и выражается через

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz.$$

Правую часть мы можем также писать в виде

$$= \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k}\,dz,$$

или

$$= \left(\frac{\partial V}{d x}\,\mathfrak{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathfrak{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathfrak{k}\right)(dx\,\mathfrak{i} + dy\,\mathfrak{j} + dz\,\mathfrak{k}).$$

Это выражение представляет собой скалярное произведение двух векторов, из которых первый зависит лишь от изменения V в направлении координатных осей, а второй определяется направлением, в котором происходит изменение, и в котором желательно исследовать V. Первый вектор мы обозначаем через $grad\ V$ или, по Гамильтону, ∇V[1]) а второй — через $\overline{\mathfrak{n}}\,dn$. Изменение V, отнесенное к

[1]) Знак ∇ представляет собой форму древне-еврейского струнного инструмента под названием „кабла“.

единице длины направления, в котором происходит изменение, т. е. $\frac{dV}{dn}$, как скалярное произведение обоих векторов, принимает наибольшее значение, когда направление $\mathfrak{n}$ совпадает с вектором *grad V*.

$$grad\ V = \frac{\partial V}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathfrak{k}$$

является таким образом, в е к т о р о м, н а п р а в л е н и е к о т о р о г о с о в п а д а е т с н а п р а в л е н и е м н а и б о л ь ш е г о и з м е н е н и я V в т о ч к е x, y, z, и а б с о л ю т н а я в е л и ч и н а к о т о р о г о д а е т э т о н а и б о л ь ш е е и з м е н е н и е. Принято говорить также *grad V* есть дифференциальный оператор

$$\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

§ 18. Дифференцирование скалярной величины по скалярной в наперед заданном направлении.

(Полный дифференциал скалярной функции со многими переменными).

Величину $\frac{dV}{dn}$, т. е. полного дифференциала V взятого в направлении $\bar{\mathfrak{n}}$ можно согласно предыдущему параграфу писать

$$\bar{\mathfrak{n}}\, grad\, V = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{dV}{dn}.$$

Таким образом, из вектора *grad V* мы можем вывести полный дифференциал V, взятый в произвольном, наперед заданном направлении — т. е. изменение V, исходя из точки x, y, z в наперед заданном направлении на единицу длины при том условии, что мы перемножаем скаларно *grad* V на единичный вектор того же направления. Компоненты *grad* V по трем направлениям осей координат $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ равны изменениям V в этих направлениях на единицу длины, т. е.

$$\mathfrak{i} \cdot grad\, V = \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$\mathfrak{j} \cdot grad\, V = \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$\mathfrak{k} \cdot grad\, V = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Вместо $\bar{\mathfrak{n}}$ *grad* V, или $\bar{\mathfrak{n}}$ *grad* V, пишут также $\bar{\mathfrak{n}} \cdot \nabla V$, или $\mathfrak{n} \cdot \nabla V$, или также $(\bar{\mathfrak{n}} \nabla) V$, или же $(\mathfrak{n} \nabla) V$. Символ $(\mathfrak{n} V)$ обозначает вместе с тем дифференциальный оператор

$$n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{\partial y} + n_3 \frac{\partial}{\partial z}.$$

$\bar{\mathfrak{n}} \cdot grad\, V = \bar{\mathfrak{n}} \cdot \nabla V = \nabla V \cdot \bar{\mathfrak{n}} = (\bar{\mathfrak{n}} \nabla) V$ равно нулю, если направления $\bar{\mathfrak{n}}$ и *grad* V взаимно перпендикулярны, т. е. когда наибольшее изменение V происходит в плоскости перпендикулярной к $\bar{\mathfrak{n}}$. Наибольшее изменение V в точке x, y, z происходит, таким образом в направлении, перпендикулярном к соприкасающейся плоскости поверхности V. Такую поверхность называют поверхностью у р о в н я или э к в и п о т е н ц и а л ь н о й; итак можно сказать:

г р а д и е н т н а п р а в л е н п е р п е н д и к у л я р н о к п о в е р х н о с т и у р о в н я ф у н к ц и и V в р а с с м а т р и в а е м о й т о ч к е x, y, z.

Из обозначения знака ∇ непосредственно следует, что

$$\nabla (U + V) = \nabla U + \nabla V,$$

$$\nabla (U V) = V \nabla U + U \nabla V,$$

и если c является постоянной, то

$$\nabla (c\, U) = c \nabla U.$$

Обратная операция, т. е. интегрирование градиента в определенном направлении дает

$$\int_1^2 \nabla V \cdot d\mathfrak{n} = V_2 - V_1,$$

соответствующей формуле обычного анализа

$$\int_1^2 \frac{dV}{dn}\, dn = V_2 - V_1.$$

Этот интеграл называется линейным интегралом вектора ∇V, или градиентом ∇. Для каких-либо двух путей с одной и той же конечной точкой этот линейный интеграл имеет одно и то же значение. В силу этого линейный интеграл градиента, взятый вдоль замкнутого пути равен нулю. Обратно, из условия, что всякий линейный интеграл вектора, взятый вдоль замкнутого пути равен нулю, следует, что вектор может быть представлен, как градиент скалярной величины. Если линейный интеграл вдоль замкнутой кривой равен нулю, то линейный интеграл, взятый вдоль отрезка кривой, зависит не от пути а от конечной точки, функцией которой он является; таким образом

$$\int_{\mathfrak{r}_0}^{\mathfrak{r}_1} X\, ds = V(x_1 y_1 z_1) - V(x_0 y_0 z_0).$$

Мы можем конечные точки обоих векторов $\mathfrak{r}_0$ и $\mathfrak{r}_1$ сблизить настолько, что в левой части останется лишь один член, а в правой дифференциал

$$X\, ds = dV.$$

$X\, ds$ есть таким образом полный дифференциал скалярной величины V; этот последний однако является произведением градиента V и направления, в котором должен быть взят полный дифференциал. Таким образом,

$$X\,ds = grad\,V \cdot d\mathfrak{s}.$$

§ 19. Дифференцирование вектора по скаларной величине в наперед заданном направлении.

(Полный дифференциал вектора)

Изменение вектора $\mathfrak{B}$ при изменении его координат x, y, z определяется суммой изменений его компонентов. Если в точке x_0, y_0, z_0 вектор имеет значение

$$\mathfrak{B} = V_1\,\mathfrak{i} + V_2\,\mathfrak{j} + V_3\,\mathfrak{k},$$

а в точке x_1, y_1, z_1 — значение

$$\mathfrak{B}' = V_1'\,\mathfrak{i} + V'_2\,\mathfrak{j} + V'_3\,\mathfrak{k},$$

то

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{B}' = (V_1 - V'_1)\,\mathfrak{i} + (V_2 - V'_2)\,\mathfrak{j} + (V_3 - V'_3)\,\mathfrak{k}.$$

Таким образом, изменения вектора, происходящие при изменении положения в данном направлении на единицу, определяются суммой изменений его компонентов

$$\bar{\mathfrak{a}} = a_1\,\mathfrak{i} + a_2\,\mathfrak{j} + a_3\,\mathfrak{k}.$$

Изменения компонентов V_1, V_2, V_3 при изменении положения в наперед заданном направлении, или полные дифференциалы V_1, V_2, V_3 в направлении $\bar{\mathfrak{a}}_1$ выражаются, согласно § 18, так

$$(\bar{\mathfrak{a}}\nabla)\,V_1,\ (\bar{\mathfrak{a}}\nabla)\,V_2,\ (\bar{\mathfrak{a}}\nabla)\,V_3.$$

Полное изменение, получаемое $\mathfrak{B}$ при приращении в направлении $\bar{\mathfrak{a}}$ на единицу изменения, или полный дифференциал $\mathfrak{B}$, взятый в направлении $\bar{\mathfrak{a}}$, выражается

(1) $$(\bar{\mathfrak{a}}\nabla)\,V_1\,\mathfrak{i} + (\bar{\mathfrak{a}}\nabla)\,V_2\,\mathfrak{j} + (\bar{\mathfrak{a}}\nabla)\,V_3\,\mathfrak{k},$$

где для сокращения пишем

(2) $$(\bar{\mathfrak{a}}\nabla)\,\mathfrak{B} = d_{\bar{\mathfrak{a}}}\,\mathfrak{B}.$$

В окончательной форме компоненты этого вектора — будем обозначать через

$$\mathfrak{W} = W_1 \mathfrak{i} + W_2 \mathfrak{j} + W_3 \mathfrak{k}$$

— принимают следующие значения:

$$(3) \quad \begin{cases} W_1 = a_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial x} + a_2 \dfrac{\partial V_1}{\partial y} + a_3 \dfrac{\partial V_1}{\partial z} \\ W_2 = a_1 \dfrac{\partial V_2}{\partial x} + a_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial y} + a_3 \dfrac{\partial V_2}{\partial z}, \\ W_3 = a_1 \dfrac{\partial V_3}{\partial x} + a_2 \dfrac{\partial V_3}{\partial y} + a_3 \dfrac{\partial V_3}{\partial z}. \end{cases}$$

Вектор $\mathfrak{W}$ находится, в зависимости от вектора $\bar{\mathfrak{a}}$. Поэтому $\mathfrak{W}$ есть линейная функция $\bar{\mathfrak{a}}$. Таким образом, полный дефференциал вектора, взятый в направлении $\bar{\mathfrak{a}}$, есть линейная векторная функция направления $\bar{\mathfrak{a}}$.

Линейные векторные функции и, в особенности симметричные линейные функции, приводящие к определению тензора, играют видную роль в физике. Их свойства будут подробно рассмотрены в ч. III настоящей работы.

В § 15 мы рассматривали изменение вектора, по времени в точке x, y, z. Если вектор $\mathfrak{V}$ дан как функция x, y, z, то величина $\dfrac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t}$ представляет изменение вектора по времени. Пусть вектор $\mathfrak{V}$ служит выражением свойств некоторой материальной точки x, y, z и пусть требуется определить промежуток времени, в течение которого произошло изменение вектора, отнесенного к этой материальной точке при ее переходе из точки x, y, z в соседнее положение на расстоянии $d\mathfrak{r} = \mathfrak{v} \cdot dt$. Согласно только что сказанному, изменение вектора в направлении $d\mathfrak{r}$ выражается через

$$(d\mathfrak{r}\, \nabla)\, \mathfrak{V}.$$

Искомое **полное изменение вектора в течение промежутка времени** dt слагается — если не принимать во внимание бесконечно малых величин высших порядков — из этих обоих частей и принимает, следовательно, вид

(4) $$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{B}.$$

В противоположность первому члену правой части т. е. локальному изменению вектора со временем, вторую часть называют стационарным изменением. Если первый член равен нулю, т. е., если данное вектором $\mathfrak{B}$ свойство является только функцией пространства, то мы имеем стационарный поток.

Точно так же из совокупности изменений вектора со временем определяется скалярное свойство V материальной точки, изменяющей свое положение со скоростью $\mathfrak{a}$, так что мы имеем выражение

(5) $$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\mathfrak{v}\,\nabla)\,V.$$

§ 20. Действие ∇ при векторном аргументе.

Применение Гамильтоновского оператора

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

к векторам приводит к формулам, имеющим значение для физики. Первоначально выражение

$$\nabla\,\mathfrak{B} = \mathfrak{i}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial z}$$

является лишь символом, требующим более точного определения. Если в это уравнение ввести векторные компоненты, то мы получаем:

$$\nabla\mathfrak{B} = \mathfrak{i}\left\{\frac{\partial V_1}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial V_2}{\partial x}\mathfrak{j} + \frac{\partial V_3}{\partial x}\mathfrak{k}\right\}$$
$$+\mathfrak{j}\left\{\frac{\partial V_1}{\partial y}\mathfrak{i} + \frac{\partial V_2}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial V_3}{\partial y}\mathfrak{k}\right\}$$
$$+\mathfrak{k}\left\{\frac{\partial V_1}{\partial z}\mathfrak{i} + \frac{\partial V_2}{\partial z}\mathfrak{j} + \frac{\partial V_3}{\partial z}\mathfrak{k}\right\}$$

Здесь возникает вопрос, как понимать произведение каждых двух векторных сомножителей. В силу возникающих сомнений необходимо исследовать оба случая: скалярное и векторное произведения. Чтобы избежать ошибок, пишем при скалярном произведении — $\nabla\mathfrak{B}$, или $(\nabla\mathfrak{B})$, или $\nabla\cdot\mathfrak{B}$, или $div\,\mathfrak{B}$, и называем его: дивергенц вектора $\mathfrak{B}$, а при векторном произведении — $[\nabla\mathfrak{B}]$, или $\nabla\times\mathfrak{B}$, или $curl\,\mathfrak{B}$, или $rot\,\mathfrak{B}$, и называем его: ротор $\mathfrak{B}$.

Согласно правилам скалярного умножения, следует

$$(1)\qquad \nabla V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z},$$

являющееся очень простым и важным дифференциальным выражением связывающим компоненты вектора. $\nabla\mathfrak{B}$ представляет собою, конечно, скалярную величину.

Согласно правилам векторного умножения имеем

$$(2)\qquad \begin{cases} [\nabla\mathfrak{B}] = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial x}\right) \\ \qquad\qquad + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right), \end{cases}$$

взамен чего мы можем воспользоваться выражением:

$$[\nabla\mathfrak{B}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}.$$

Эта формула имеет вид, подобный векторному произведению двух векторов; гамильтоновский оператор имеет значение исключительно, как обычный вектор, и таким образом при вычислениях с этим оператором можно поступать так же, как еслибы знак ∇ представлял собой самостоятельный вектор.

Покажем на примерс, как можно пользоваться символом ∇, как вектором согласно упомянутому выше замечанию. Этот вывод, который впоследствии будет нами использован, легко проверяется посредством основного уравнения (2).

Пусть $\mathfrak{u}$ есть произвольный вектор, зависящий от x, y, z, и

$$\mathfrak{r} = x\,\mathfrak{i} + y\,\mathfrak{j} + z\,\mathfrak{k}.$$

Требуется вычислить $rot\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{u}]$ или $[\nabla\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{u}]]$. Дифференцирование необходимо распространить на $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{u}$. Следовательно,

$$rot\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{u}] = rot\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{u}]_{\mathfrak{u}} + rot\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{u}]_{\mathfrak{r}},$$

где индексы обозначают остающиеся постоянными величины при дифференцировании. Согласно уравнению (2) § 13 имеем:

$$(3)\quad rot\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{u}]_{\mathfrak{u}} = [\nabla\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{u}]]_{\mathfrak{u}} = (\mathfrak{u}\,\nabla)_{\mathfrak{u}}\mathfrak{r} - (\nabla\,\mathfrak{r})_{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{u} = d_{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{r} - \mathfrak{u}\,div\,\mathfrak{r}.$$

Соответсгвенно

$$(4)\qquad rot\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{u}]_{\mathfrak{r}} = -\,rot\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]_{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r}\,div\,\mathfrak{u} - d_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{u}.$$

Значения $d_{\mathfrak{u}}\mathfrak{r}$ и $d_{\mathfrak{r}}\mathfrak{u}$ определяются уравнением (2); § 19 они являются полными дифференциалами $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{u}$, взятыми в направлении $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{r}$, помноженными соответственно на абсолютные значения $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{r}$.

В силу особого значения $\mathfrak{r}$ имеем

$$(5)\qquad d_{\mathfrak{u}}\,\mathfrak{r} = \mathfrak{u}\,,\quad div\,\mathfrak{r} = 3.$$

Таким образом,

$$rot\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{u}] = -\,2\,\mathfrak{u} + \mathfrak{r}\,div\,\mathfrak{u} - d_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{u}.$$

§ 21. Скаларное действие ∇ при векторном аргументе. Теорема Гаусса.

Для физического истолкования производных применим эти символы к уже известным примерам. Первоначально рассмотрим символ $\nabla \mathfrak{B}$:

В § 12, как пример скаларного произведения трех векторов, была рассмотрена величина, названная „потоком вектора". В силу этого поток вектора $\mathfrak{B}$, через элемент поверхности $d\mathfrak{o}$ в заранее данном направлении равен $dw = \mathfrak{B} \cdot d\mathfrak{o}$. Дана задача: определить поток вектора $\mathfrak{B}$, зависящего от своих координат, через произвольную на перед заданную поверхность, элемент которой нмеет нормаль, направленую наружу. Вообразим себе нашу замкнутую поверхность разделенной на большое число элементов плоскостями, параллельными координатным плоскостям, отстоящими друг от друга на росстояниях dx, dy и dz. Обозначим полученный элемент поверхности через $d\mathfrak{o}$. Тогда

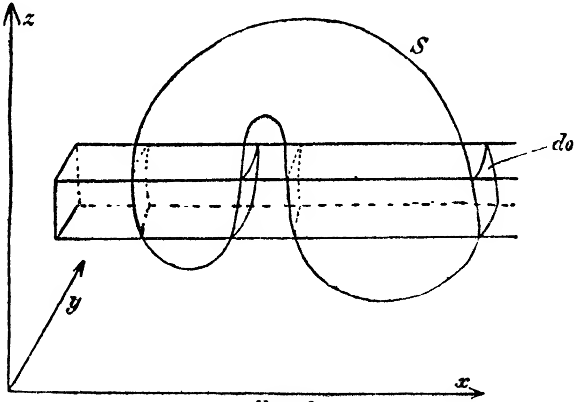
$$d\mathfrak{o} = dy\, dz\, \mathfrak{i} + dz\, dx\, \mathfrak{j} + dx\, dy\, \mathfrak{k}$$

и

$$(1) \quad w = \int_0 \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{d}\,\mathfrak{o} = \int_0 (V_1\, dy\, dz + V_2\, dz\, dx + V_3\, dx\, dy).$$

Величина $V_1\, dy\, dz$ есть поток вектора $\mathfrak{B}$ в точке x, y, z через элемент поверхности $d\mathfrak{o}$ в направлении оси x, или — поток через проекцию $d\mathfrak{o}$ на плоскость yz.

На черт. 9 **S** есть кривая сечения замкнутой поверхности плоскостью, параллельной плоскости zx, причем $d\mathfrak{o}$ является элементом поверхности. Соответствующий этому элементу $d\mathfrak{o}$, нормальный к плоскости yz, цилиндр вырезает в плоскости yz проекцию $d\mathfrak{o}$, равную $dy\, dz$, и проходит через замкнутую поверхность, по крайней мере, еще один раз, во всяком случае — четное число раз (на черт. — четыре раза). В первой части интеграла происходит суммирование проекций всех элементов поверхности на плоскость $y z$, умноженных на V_1. Это суммирование мы производим таким образом, что первоначально составляем суммы с одними и теми же $d y\, d z$, умноженными на значения V_1,



Черт. 9.

и затем уже суммируем эти величины по всей плоскости $y z$. Пусть цилиндр пересекает поверхность в точках $x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots$ Если в точке x_0 величина V_1 равна $V_1^{(0)}$, то в точке x_1 она равна

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x}\, d x + V_1^{(0)},$$

в точке x_3 соответственно

$$\int\limits_{x_2}^{x_3} \frac{\partial V_1}{\partial x}\, d x + V_1^{(2)} \text{ и т. д.}$$

При суммировании всех V_1 относящихся к $dy\ dz$, мы должны учитывать, что нормали проекций элементов поверхности в двух последовательных точках пересечения имеют противоположные направления в силу того условия, что в замкнутой поверхности мы должны всегда брать наружные нормали. Следовательно, $dy\ dz$ обладает один раз положительным знаком, а другой раз — отрицательным. В силу установленного условия для направления нормалей замкнутой поверхности, нормаль к проекции элемента поверхности берется в первом сечении в отрицательном направлении оси x, а потому для всей суммы получаем величину:

$$S = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial V_1}{\partial x} dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial V_1}{\partial x} dx + \ldots$$

Умноженная на $dy\ dz$ сумма интегралов S является как раз суммой всех элементов об'ема $d\tau$ поверхности $\frac{\partial V_1}{\partial x}$, представляющей собой цилиндр с основанием $dy\ dz$. Интеграл

$$\int S\, dy\, dz,$$

распространенный по всей плоскости yz, является суммой всех элементов об'ема данной поверхности, умноженных на $\frac{\partial V_1}{\partial x}$. В силу этого мы пишем

$$(2) \quad \int V_1\, dy\, dz = \int S\, dy\, dz = \int \frac{\partial V_1}{\partial x} dx\, dy\, dz = \int \frac{\partial V_1}{\partial x} d\tau.$$

Точно так же

$$\int V_2\, dx\, dz = \int \frac{\partial V_2}{\partial y} d\tau,$$

$$\int V_3\, dy\, dz = \int \frac{\partial V_3}{\partial z} d\tau.$$

Произведя сложение, получаем

(3) $$w = \int \mathfrak{V} \cdot d\mathfrak{o} = \int \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \right) d\tau = \int \nabla \mathfrak{V}\, d\tau.$$

П о т о к в е к т о р а $\mathfrak{V}$ ч е р е з з а м к н у т у ю п о в е р х н о с т ь р а в е н и н т е г р а л у п р о и з в е д е н и я $div\ \mathfrak{V}$ н а э л е м е н т о б' е м а , з а к л ю ч е н н о г о в д а н н у ю п о в е р х н о с т ь. Если поверхность заключает лишь один элемент об'ема, то получаем: п о т о к в е к т о р а $\mathfrak{V}$ ч е р е з п о в е р х н о с т ь б е с к о н е ч н о м а л о г о э л е м е н т а о б' е м а , о т н е с е н н о г о к е д и н и ц е о б' е м а , е с т ь д и в е р г е н ц и я в е к т о р а $\mathfrak{V}$, т. е п р и м е н е н н а я к в е к т о р у $\mathfrak{V}$ с к а л а р н а я о п е р а ц и я Г а м и л ь т о н а ∇; так. образом,

(2) $$div\ \mathfrak{V} = \lim_{(d\tau = 0)} \frac{\int \mathfrak{V} \cdot d\mathfrak{o}}{d\tau}.$$

Для того, чтобы получить другое наглядное значение дивергенции, рассмотрим теперь векторный поток через поверхность малого цилиндра с очень малой высотой $d\mathfrak{h}$, основанием, перпендикулярным направлению вектора $\mathfrak{V}$, и осью, совпадающей с направлением $\mathfrak{V}$. Об'ем цилиндра

$$d\tau = d\mathfrak{h} \cdot d\mathfrak{o};$$

следовательно,

(5) $$div\ \mathfrak{V} \cdot d\tau = \int \mathfrak{V}\, d\mathfrak{o}.$$

Интеграл в правой части состоит только из обоих элементов $\mathfrak{V}\, d\mathfrak{o}$, отнесенных к плоскостям оснований, так как $\mathfrak{V} \cdot d\mathfrak{o}$ равно на поверхности цилиндра нулю. В виду того, что для обоих этих плоскостей $d\mathfrak{o}$ имеет противоположные знаки, то $\int \mathfrak{V}\, d\mathfrak{o} = (V^{(1)} - V^{(0)}) \cdot d\mathfrak{o}$, если при этом $V^{(1)}$ и $V^{(0)}$ выражают величины вектора $\mathfrak{V}$ для обоих оснований цилиндра. Таким образом, уравнение (8) принимает вид:

$$div\ \mathfrak{V} \cdot d h = V^{(1)} - V^{(0)},$$

Это уравнение говорит: изменения векторного потока через элемент поверхности в точке x_1, y_1, z_1, удаленной от точки x_0, y_0, z_0 в направлении вектора $\mathfrak{B}$ на расстояние dh равно дивергенции вектора $\mathfrak{B}$, умноженной на dh.

Уравнение (3) известно под названием теоремы Гаусса и дает преобразование интеграла, взятого по поверхности, в об'емный, или обратно.

Здесь необходимо обратить внимание на то, что знак перед $\nabla\mathfrak{B}$ зависит от установления направления нормали, и что таким образом $\nabla\mathfrak{B}$ есть псевдоскаларная величина. Мы будем постоянно придерживаться ранее принятых определений, согласно которым нормаль к поверхности направлена наружу.

§ 22. Применения. Обозначение дивергенции.

Если вектор $\mathfrak{B}$ обозначает величину и направление теплового потока в каком-либо теле, проходящего в единицу времени через нормальную к $\mathfrak{B}$ единицу площади поверхности этого тела, то количество тепла, проходящего через элемент поверхности do в произвольно наперед заданном направлении, т. е. векторный поток через этот элемент поверхности, равно $\mathfrak{B}\, do$. Тепловой поток, проходящий через замкнутую поверхность, заключающую тело, равняется количеству тепла, воспринимаемому через поверхность тела его об'емом. Топловой поток увеличивает количество энергии заключающейся в данном об'еме. Если в этом теле не происходит работы внутренних или внешних сил, то количество воспринимаемого тепла повысит температуру тела. Если — c удельная теплота, а ρ — плотность тела, то количество тепла, вызывающее повышение температуры $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ в об'еме $d\tau$ в единицу времени, выразится через:

$$c\rho\frac{\partial\vartheta}{dt}d\tau.$$

Так как это выражение равно $div\,\mathfrak{B}\cdot d\tau$, то получим

$$div\,\mathfrak{B}=c\rho\frac{\partial\vartheta}{\partial t}.$$

Если через вектор $\mathfrak{B}$ обозначить истечение жидкости, то векторный поток через поверхность равен количеству жидкости, протекающему через поверхность в единицу времени. Условие несжимаемости жидкости требует, чтобы в замкнутую поверхность поступало не больше жидкости, чем из нее вытекает т. е. чтобы поток через замкнутую поверхность равнялся нулю. Таким образом, условие несжимаемости жидкости в векторном изображении гласит:

$$div\,\mathfrak{B}=0.$$

Если векторное поле таково, что в элементах об'емов определенных точек пространства $\nabla\mathfrak{B}$ принимает значение отличное от нуля, то в этих элементах вводимое через вектор количество (напр. количество тепла или жидкости) увеличивает энергию тела или ее уменьшает. В случае теплового потока это увеличение или уменьшение можно себе представить таким образом, что прибывающее или исчезающее количество теплоты соответствует увеличению, или уменьшению, количества внутренней энергии элемента об'ема. При исследовании истечения жидкости, которую мы привыкли рассматривать как несжимаемую, такое представление, предполагающее возникновение или исчезновение материи в пространстве, является несколько натянутым; однако оно об'ясняется тем, что в силу каких-либо причин с поверхности тела берется частица материи. Таким образом мы приходим к таким элементам об'ема, у которых отнимается большее количество материи, чем в них поступает. Точки, в которых наблюдается больший приток, чем убывание, называются **точками падения** (**отрицательный источник**). Положительно или отрицательно вводимое количество, т. е. $\nabla \mathfrak{B}$, называется **дивергенцией источника**. В силу этого значения взамен $\nabla \mathfrak{B}$ пользуются знаком $div\, \mathfrak{B}$.

§ 23. Векторное действие ∇. Вращение.

Рассмотрим для выяснения значения действия $[\nabla \mathfrak{B}]$, движение твердого тела. Относительная скорость некоторой точки M_1 относительно точки M_2 дана уравнением

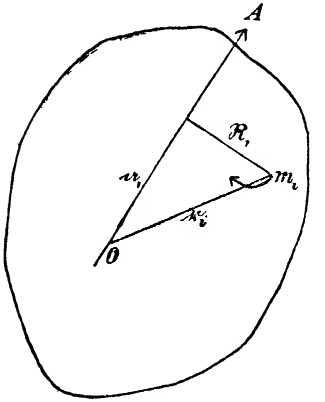
$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \bar{\mathfrak{r}} \frac{dr}{dt} + r \frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}, \tag{1}$$

при условии, что вектор $\mathfrak{r}$ служит линией, соединяющей точки M_1 и M_2. Если обе точки связаны между собой неподвижно, то расстояние между ними не меняется, в силу чего должно удовлетворяться условие $\frac{dr}{dt} = 0$; в таком случае последний член

$$\mathfrak{v} = r \frac{d\bar{\mathfrak{r}}}{dt}; \tag{2}$$

указывает, что относительная скорость $\mathfrak{v}$ направлена постоянно перпендикулярно к линии, соединяющей обе точки, относительную скорость которых $\mathfrak{v}$ мы ищем. Уравнение (1) представляет собой общий вид относительного движения некоторой точки твердого тела относительно какой-либо другой точки O, неизменно связанной с этим же телом. Если точка O сама по себе обладает скоростью $\mathfrak{v}_0$, то, при $\mathfrak{r}_1$, представляющем собой расстояния точек m_i от точки сравнения, уравнение скорости $\mathfrak{v}_i$ какой-либо точки твердого тела пишется в обшем виде так:

$$\mathfrak{v}_i = \mathfrak{v}_0 + r_i \frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i}{dt}. \tag{3}$$



Черт. 10.

Разность $\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0$ мы можем написать еще иначе. Пусть OA (черт. 10) с направлением вектора $\bar{\mathfrak{a}}$ служит мгновенною осью вращения твердого тела; в этом случае—если $\mathfrak{R}_i$ есть мгновенный радиус кривизны в точке m_i ($\mathfrak{R}_i \perp \mathfrak{a}$) — имеем:

$$\mathfrak{r}_i = \mathfrak{a}_i + \mathfrak{R}_i$$

$$\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0 = \frac{d\,\mathfrak{r}_i}{dt} = \frac{d\,\mathfrak{R}_i}{dt},$$

и уравнение (2) можно написать:

$$\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0 = R_i \frac{d\bar{\mathfrak{R}}_i}{dt} = (\mathfrak{R}_i \bar{\mathfrak{R}}_i) \frac{d\bar{\mathfrak{R}}_i}{dt}. \tag{4}$$

Правую часть можно на основании идентичности

$$\bar{\mathfrak{R}}_i \left(\frac{d\bar{\mathfrak{R}}_i}{dt} \mathfrak{R}_i \right) = 0,$$

а также на основании формулы (2) § 13 преобразовать в

$$-\left[\mathfrak{R}_i \left[\bar{\mathfrak{R}}_i \frac{d\bar{\mathfrak{R}}_i}{dt} \right] \right].$$

Вектор $\mathfrak{R}_i \left[\frac{d\bar{\mathfrak{R}}_i}{dt} \right]$ имеет одно и то же значение для всех точек m_i твердого тела. Он направлен перпендикулярно к $\overline{\mathfrak{R}}_i$ и к $\frac{d\overline{\mathfrak{R}}_i}{dt}$, т. е. совпадает с направлением оси вращения. Его величина равна двойной площади, описанной в течение единицы времени радиусом, равным единице, в плоскости перпендикулярной оси вращения. Мы назовем этот вектор, как это обычно принято, угловой скоростью и обозначим его через $\mathfrak{u}$. Ибо в действительности понятие „угловой скорости" в обычном анализе имеет все характерные особенности вектора, т. к. для его определения, помимо задания абсолютной величины, требуется также и задание направления оси вращения. Таким образом,

$$\mathfrak{u} = \left[\overline{\mathfrak{R}}_i \frac{d\overline{\mathfrak{R}}_i}{dt}\right] \text{ и } \mathfrak{v}_i = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{R}_i],$$

или, т. к. $[\mathfrak{a}_i\,\mathfrak{u}] = 0$ и $\mathfrak{r}_i = \mathfrak{a}_i + \mathfrak{R}_i$,

$$\mathfrak{v}_i = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}_i].$$

Применим теперь к

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + [\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}_i] \tag{5}$$

векторное дифференциальное действие ∇. При производимом здесь дифференцировании по x, y, z вопрос сводится к определению изменения $\mathfrak{v}$ или $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]$, при переходе из точки x, y, z в соседнюю. Однако в этой соседней точке в одно и то же время $\mathfrak{u}$ имеет то же значение, что и в точке x, y, z; таким образом, при дифференцировании правой части мы можем рассматривать $\mathfrak{u}$, как постоянную. Применяя уравнения (3) и (5) из § 20, получаем

$$rot\,\mathfrak{v} = rot\,[\mathfrak{u}\,\mathfrak{r}]_{\mathfrak{u}} = 2\,\mathfrak{u}. \tag{6}$$

В р а щ е н и е, или р о т о р, м г н о в е н н о й с к о р о с т и н е к о т о р о й т о ч к и р а в н о д в о й н о й у г л о в о й с к о р о с т и т о ч к и н а е е т р а е к т о р и и (ср. конец следующего §).

В силу сказанного, это действие обозначим, как вихрь ротор, *curl*.

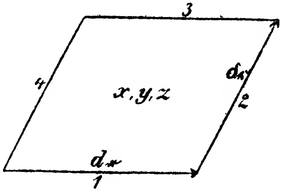
Из определения компонентов получим:

$$(7)\qquad rot\,\mathfrak{v} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = +\mathfrak{i}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right),$$

откуда непосредственно следует, что $rot\,\mathfrak{v} = 0$, если $\mathfrak{v}$ является **градиентом скалярной величины**, т. е. $\mathfrak{v} = \nabla\varphi$, так как тогда миноры равны нулю. Если же наоборот, $rot\,\mathfrak{v} \neq 0$, то согласно § 18, интеграл $\int \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s}$ должен зависеть от порядка интегрирования и отличаться при замкнутой кривой от нуля.

§ 24 Теорема Стокса.

Если **интеграл** $\int \mathfrak{V}\, d\mathfrak{s}$, **взятый по замкнутой кривой, отличен от нуля, то он может быть представлен посредством вектора** $rot\,\mathfrak{V}$



Черт. 11.

Пусть первоначально дана вполне определенная кривая вдоль которой производится интеграция — контур параллелограмма $\mathfrak{o}\, do = d\mathfrak{o}$ с бесконечно малой площадью и сторонами $d\mathfrak{r}$ и $\delta\mathfrak{r}$ в точке x, y, z (черт. 11). Средние величины постоянно изменяющегося вектора $\mathfrak{V}$ по четырем сторонам 1, 2, 3, 4 равны $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_3$, $\mathfrak{V}_4$. Тогда

$$(1)\quad \begin{cases} \int\limits_1^1 \mathfrak{V}\, d\mathfrak{s} = \mathfrak{V}_1\, d\mathfrak{r} + \mathfrak{V}_2\, \delta\mathfrak{r} - \mathfrak{V}_3\, d\mathfrak{r} - \mathfrak{V}_4\, \delta\mathfrak{r} = \\ \qquad = d\mathfrak{r}\,(\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_3) - \delta\mathfrak{r}\,(\mathfrak{V}_4 - \mathfrak{V}_2). \end{cases}$$

$\mathfrak{V}_1 - \mathfrak{V}_3$ есть изменение вектора $\mathfrak{V}$ в точке x, y, z в направлении $-\delta\mathfrak{r}$ на отрезке $\delta\mathfrak{r}$; разность $\mathfrak{V}_4 - \mathfrak{V}_2$ такое изменение в направлении $-d\mathfrak{r}$ на отрезке $d\mathfrak{r}$; таким образом мы можем написать

$$(2)\qquad \int\limits_1^1 \mathfrak{V}\, d\mathfrak{s} = (d\mathfrak{r}\,\nabla)\,\mathfrak{V}\quad \delta\mathfrak{r} - (\delta\mathfrak{r}\,\nabla)\,\mathfrak{V}\quad d\mathfrak{r}.$$

Если принять во внимание, что знак действия ∇ может рассматриваться, как вектор, то мы можем, по правилам перемножения векторов, произвести следующие преобразования. Единственная необходимая здесь предосторожность это — соблюдение порядка следования знаков. Далее, по окончании преобразования необходимо помнить что, каков бы ни был порядок следования знаков, дифференцирование под знаком ∇ относится к вектору $\mathfrak{V}$, в то время, как $\delta\mathfrak{r}$ и $d\mathfrak{r}$ являются постоянными величинами.

$$(3)\quad \begin{cases} \int \mathfrak{V}\, d\mathfrak{s} = (d\mathfrak{r}\,\nabla)\,(\mathfrak{V}\,\delta\mathfrak{r}) - (\delta\mathfrak{r}\,\nabla)\,(\mathfrak{V}\, d\mathfrak{r}) \\ \qquad = (\nabla\, d\mathfrak{r})\,(\mathfrak{V}\,\delta\mathfrak{r}) - (\nabla\,\delta\mathfrak{r})\,(\mathfrak{V}\, d\mathfrak{r}) \\ \qquad = [\nabla\,\mathfrak{V}]\,[d\mathfrak{r}\,\delta\mathfrak{r}] \\ \qquad = rot\,\mathfrak{V}\cdot[d\mathfrak{r}\,\delta\mathfrak{r}] = rot\,\mathfrak{V}\cdot d\mathfrak{o}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$(4)\qquad rot\,\mathfrak{V}\cdot\bar{\mathfrak{o}} = \lim_{do=0} \cdot \frac{\int \mathfrak{V}\, d\mathfrak{s}}{d\,o},$$

причем совершенно безразлично представляет ли собой $o\,do$ параллелограмм, или произвольно ограниченный бесконечно малый элемент поверхности. Выражение (4) говорит, что **отношение линейного интеграла**

вектора умноженного скаларно на элемент пути к бесконечно малому элементу поверхности, ограниченному интегральной кривой, приближается к пределу, равному вихревому компоненту вектора в направлении нормали к поверхности в месте ограниченном интегральной кривой.

Или — ротор вектора $\mathfrak{B}$ в точке x, y, z равен пределу, к которому стремится взятый относительно вектора $\mathfrak{B}$ линейный интеграл вдоль кривой, ограничивающей нормальный к направлению вихря бесконечно-малый элемент поверхности, после того, как этот интеграл посредством деления на площадь элемента поверхности отнесен к единице площади.

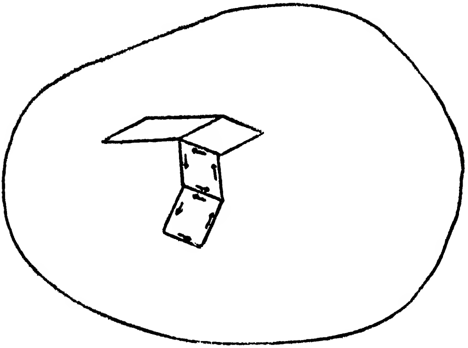
К **теореме Стокса**, дающей преобразование линейного интеграла в интеграл, взятый по поверхности, или обратно, мы приходим также, интегрируя по поверхности F, разложенной на упомянутые элементы поверхности, величину $rot\,\mathfrak{B}\cdot\bar{\mathfrak{o}}\,do$, взятую из уравнения (3). Левая часть уравнения (3) обращается в силу этого в сумму линейных интегралов, взятых вдоль всех кривых, ограничивающих упомянутые элементы. Но так как кривые, ограничивающие два соседних элемента, частью перекрывают друг друга (см. черт. 12), и так как эти отрезки при интегрировании будут иметь противоположное направление, то сумма всех линейных интегралов равна линейному интегралу, взятому относительнв $\mathfrak{B}\,d\mathfrak{s}$ вдоль кривой, ограничивающей плоскость F. Таким образом

$$\int \mathfrak{B}\,d\mathfrak{s} = \int rot\,\mathfrak{B}\,d\mathfrak{o}\,. \qquad (5)$$

Это уравнение дает теорему Стокса.

Из уравнения (5) следует важная теорема, по которой

$$\int rot\,\mathfrak{V}\,d\mathfrak{o},$$



Черт. 12

взятый вдоль замкнутой кривой, равен нулю, так как при этом исчезает интеграл в левой части.

Если подставить в уравнение (4) взамен $\mathfrak{V}$ вектор $\mathfrak{v}$, представляющий скорость точки x, y, z некоторого твердого тела, то уравнение (4) выразит, что компоненты $rot\,\mathfrak{v}$ по определенному направлению равны линейному интегралу $\mathfrak{v}$, взятому относительно бесконечно малого нормального этому направлению элемента поверхности, разделенному на величину площади этого элемента. Если этот элемент поверхности совпадает с плоскостью круга кривизны траектории в точке $x\ y\ z$, то линейный интеграл, а вместе с ним также и левая часть, принимает максимальное значение. Черт. 11 ясно показывает, что эта величина тем больше, чем меньше радиус кривизны траектории, и чем больше скорость точки $x\ y\ z$ — другими словами—чем больше угловая скорость точки $x\ y\ z$ на траектории (относительно мгновенного центра кривизны). Это рассуждение способствует пояснению смысла уравнения (6) § 23.

§ 25. Применения.

Уравнение (3) предыдущего параграфа мы можем применить для вывода новой формулы полного дифференциала, данного в § 19 в виде $(\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{B}$. Так как в этой форме выражения мы хотим выразить, что изменение $\mathfrak{B}$ вдоль очень малого отрезка должно определяться в направлении $\mathfrak{a}$, то мы пишем полный дифференциал $(d\mathfrak{a}\nabla)\mathfrak{B}$. Заменяя в уравнении (3) § 24 $d\mathfrak{r}$ через $d\mathfrak{a}$, имеем

$$(1)\qquad [rot\,\mathfrak{B}\,d\,\mathfrak{a}]\delta\,\mathfrak{r} = (d\,\mathfrak{a}\,\nabla)\,\mathfrak{B}\cdot\delta\,\mathfrak{r} - \nabla\,(\mathfrak{B}\,d\,\mathfrak{a})\,\delta\,\mathfrak{r}.$$

Согласно правилам умножения, взамен этой формулы мы можем написать:

$$\delta\,\mathfrak{r}\left\{[rot\,\mathfrak{B}\,d\mathfrak{a}]+\nabla(\mathfrak{B}\,d\mathfrak{a})-(d\mathfrak{a}\,\nabla)\,\mathfrak{B}\right\}=0.$$

Так как это уравнение должно удовлетворяться при любом значении вектора $\delta\,\mathfrak{r}$, то следовательно, выражение в скобках равно нулю, и полный дифференциал вектора $\mathfrak{B}$ в направлении вектора $d\,\mathfrak{a}$ выразится в виде

$$(2)\qquad (d\,\mathfrak{a}\,\nabla)\,\mathfrak{B} = [rot\,\mathfrak{B}\,d\,\mathfrak{a}] + \nabla\,(\mathfrak{B}\,d\mathfrak{a})_{d\,\mathfrak{a}},$$

причем необходимо заметить, что $d\,\mathfrak{a}$ остается при дифференцировании постоянным, что отмечено здесь индексом.

В силу сказанного, формула (4) § 19 переходит в

$$(3)\qquad \frac{d\,\mathfrak{B}}{d\,t} = \frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,t} + [rot\,\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{v}] + \nabla\,(\mathfrak{B}\,\mathfrak{v})_{\mathfrak{v}}.$$

Если $\mathfrak{B}$ является вектором скорости данной точки, то мы получаем, особую формулу.

$$(4)\qquad \frac{d\,\mathfrak{v}}{d\,t} = \frac{\partial\,\mathfrak{v}}{\partial\,t} + {}^1/_2\,\nabla\,\mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}\,rot\,\mathfrak{v}].$$

Общее изменение векторного потока через поверхность F в элемент времени dt будет

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{o},$$

где $\int \mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{o}$ является скаларной величиной; согласно уравнению (5) § 19 имеем, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\int \mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{o} = \frac{\partial}{\partial t}\int \mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{o} + (\mathfrak{v}\nabla)\int \mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{o}.$$

Последний член выражает изменение потока в течение единицы времени, когда поверхность, через которую происходит истечение, движется со скоростью $\mathfrak{v}$. Поверхность эта проходит при движении некоторую часть пространства, ограниченного, во первых, величиной и положением поверхностей F_1 и F_2 в начале и конце движения и, во вторых, цилиндром, образованным движением ограничивающей эту поверхность кривой $\mathfrak{s}$. Поток, проходящий из этого замкнутого пространства, будет

$$\int div\, \mathfrak{B}\,(\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o}).$$

Установим теперь, что нормаль к $d\mathfrak{o}$ образует острый угол с направлением $\mathfrak{v}$; этим самым мы устанавливаем направление ограничивающей кривой $\mathfrak{s}$, и притом так, что $[d\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{v}]$ есть элемент поверхности рассматриваемого пространства с направленной наружу нормалью. Вычитая из этого потока поток, выходящий через поверхность

$$\int [d\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{v}],$$

соединяющей F_1 и F_2, получаем поток, выходящий через обе поверхности F_1 и F_2. Но это и есть искомое изменение потока, в случае перехода поверхности F_1 в F_2. Таким образом,

$$(\mathfrak{v}\nabla)\int \mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{o} = \int div\, \mathfrak{B}\,(\mathfrak{v}\cdot d\mathfrak{o}) + \int [\mathfrak{v}\; d\mathfrak{s}],$$

и, применяя теорему Стокса,

$$(5)\quad \begin{cases} (\mathfrak{v}\,\nabla)\int \mathfrak{B}\cdot d\,\mathfrak{o} = \int div\,\mathfrak{B}\,(\mathfrak{v}\cdot d\,\mathfrak{o}) + \int [\mathfrak{B}\,\mathfrak{v}]\,d\,\mathfrak{s} \\ \qquad = \int div\,\mathfrak{B}\,(\mathfrak{v}\cdot d\,\mathfrak{o}) + \int rot\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{v}]\,d\,\mathfrak{o}, \end{cases}$$

следовательно,

$$(6)\quad \frac{d}{d\,t}\int \mathfrak{B}\cdot d\mathfrak{o} = \int\left\{\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,t} + \mathfrak{v}\;div\,\mathfrak{B} + rvt\,[\mathfrak{B}\,\mathfrak{v}]\right\}d\,\mathfrak{o}.$$

Изменение потока через з а м к н у т у ю поверхность выразится поэтому формулой

$$(7)\qquad \frac{d}{d\,t}\int \mathfrak{B}\cdot d\,\mathfrak{o} = \int\left(\frac{\partial\,\mathfrak{B}}{\partial\,t} + \mathfrak{v}\;div\,\mathfrak{B}\right)d\,\mathfrak{o}.$$

§ 26. Теоремы о количестве движения.

Для определения движения твердого тела, подверженного действию наперед заданных сил, мы исходим из принципа Даламбера. Согласно этому принципу, если к действующим силам, приложенным к системе находящихся в движении материальных точек, прибавить ускорения этих точек, взятые с отрицательным знаком и помноженные на массы этих же точек — т. е. силы инерции, то силы будут находиться в равновесия. А так как условия равновесия действующих на твердое тело сил (§ 10), дают условия, из которых могут быть выведены уравнения движения, если m_i обозначают массы точек приложения сил, и — $\mathfrak{p}_i$ — их расстояния от некоторой неподвижной точки в пространстве, имеем

$$\sum_i\left(\mathfrak{P}_i - m_i\frac{d^2\,\mathfrak{p}_i}{d\,t^2}\right) = 0 \text{ и } \sum_i\left[\mathfrak{p}_i\;\mathfrak{P}_i - m_i\frac{d^2\,\mathfrak{p}_i}{d\,t^2}\right] = 0.$$

Эти уравнения могут быть написаны в другом виде, а именно:

$$(1)\quad \begin{cases} \sum_i \mathfrak{P}_i = \frac{d}{d\,t}\sum_i m_i\frac{d\,\mathfrak{p}_i}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\sum_i m_i\mathfrak{v}_i, \\ \sum_i [\mathfrak{p}_i\mathfrak{P}_i] = \sum_i \mathfrak{R}_i = \frac{d}{d\,t}\sum_i m_i\left[\mathfrak{p}_i\,\frac{d\mathfrak{p}_i}{d\,t}\right] = \frac{d}{d\,t}\sum_i m_i\,[\mathfrak{p}_i\,\mathfrak{v}_i] \end{cases}$$

Величина $\sum_i m_i \mathfrak{v}_i = \mathfrak{B}$ называется результирующей величиной количества движения, величина $\sum_i m_i [\mathfrak{p}_i \mathfrak{v}_i] = \mathfrak{U}$ результирующим моментом количества движения. В силу этих обозначений уравнения (1) обращаются в уравнения, дающие **теоремы о количестве движения**:

$$\sum_i \mathfrak{P}_i = \frac{d\mathfrak{B}}{dt}; \qquad \sum_i \mathfrak{K}_i = \frac{d\mathfrak{U}}{dt}.$$

Если вопрос идет о движении твердого тела вокруг неподвижной точки, и если эту точку принять за начало координат, то $\mathfrak{r}_0 = 0$; $\mathfrak{v}_0 = 0$, и

$$\mathfrak{U} = \sum_i m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{v}_i] = \sum_i m_i [\mathfrak{r}_i [\mathfrak{u}\mathfrak{r}_i]] =$$

$$= \sum_i m_i \mathfrak{r}_i^2 \cdot \mathfrak{u} - \sum_i m_i \mathfrak{r}_i (\mathfrak{u}\mathfrak{r}_i),$$

или, если масса данного тела распределена равномерно, то:

$$\mathfrak{U} = \int \rho [\mathfrak{r}\mathfrak{v}] \, d\tau = \left(\int \rho \mathfrak{r}^2 \cdot d\tau\right) \mathfrak{u} - \int \rho \mathfrak{r} (\mathfrak{u}\mathfrak{r}) \, d\tau,$$

с компонентами

$$(2) \begin{cases} U_1 = +u_1 \int \rho (r_2^2 + r_3^2) \, d\tau - u_2 \int \rho \, r_1 r_2 \, d\tau - u_3 \int \rho \, r_1 r_3 \, d\tau, \\ U_2 = -u_1 \int \rho \, r_2 r_1 \, d\tau + u_2 \int \rho (r_1^2 + r_3^2) \, d\tau - u_3 \int \rho \, r_2 r_3 \, d\tau, \\ U_3 = -u_1 \int \rho \, r_3 r_1 \, d\tau - u_2 \int \rho \, r_3 r_2 \, d\tau + u_3 \int \rho (r_1^2 + r_2^2) \, d\tau. \end{cases}$$

§ 27. Многократное применение дифференциального оператора ∇.

Мы уже несколько раз воспользовались замечанием, что знаком ∇ при перемножении и преобразовании выражений можно пользоваться, как символом вектора. При помощи этого символического обозначения ряда вычислений, как наиболее простого метода мы можем вывести формулы, которые приведут нас к уже известным формам применения Гамильтоновского оператора к произведениям скаларов и векторов, а также и к формуле многократного применения этого оператора.

Ниже приведены по порядку различные трехчленные дифференциальные сочетания скаларов, векторов и знака самого оператора. Способ изображения уже достаточно определен, а потому формулы не нуждаются в более подробном об'яснении; члены с индексом обозначают величины, которые приняты при дифференцировании в дифференциальных выраженях за постоянные:

1) $\nabla(a\,\mathfrak{b}) = div\,(a\,\mathfrak{b}) = \nabla(a\,\mathfrak{b})_a + \nabla(a\,\mathfrak{b})_{\mathfrak{b}} = a\,div\,\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\,grad\,a.$

(2) $[\nabla(a\mathfrak{b})] = rot\,(a\,\mathfrak{b}) = a\,rot\,\mathfrak{b} - [\mathfrak{b}\,grad\,a].$

(3) $\nabla(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = grad\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) = grad\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_{\mathfrak{a}} + grad\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_{\mathfrak{b}}.$

(4) $\nabla[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = div\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = \nabla[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]_{\mathfrak{a}} + \nabla[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]_{\mathfrak{b}} =$
$= -\mathfrak{a}\,rot\,\mathfrak{b} + \mathfrak{b}\,rot\,\mathfrak{a}.$

(5) $[\nabla[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]] = rot\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = [\nabla[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]]_{\mathfrak{a}} + [\nabla[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]]_{\mathfrak{b}} =$
$= [\mathfrak{a}(\nabla\mathfrak{b}) - \mathfrak{b}(\nabla\mathfrak{a})]_{\mathfrak{a}} + [\mathfrak{a}(\nabla\mathfrak{b}) - \mathfrak{b}(\nabla\mathfrak{a})]_{\mathfrak{b}} =$
$= \mathfrak{a}\,div\,\mathfrak{b} - (\mathfrak{a}\nabla)\,\mathfrak{b} + (\mathfrak{b}\nabla)\,\mathfrak{a} - \mathfrak{b}\,div\,\mathfrak{a}.$

(6) $[\mathfrak{a}[\nabla\mathfrak{b}]] = \nabla(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_{\mathfrak{a}} - \mathfrak{b}(\mathfrak{a}\nabla)_{\mathfrak{a}} = grad\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_{\mathfrak{b}} - (\mathfrak{a}\nabla)\,\mathfrak{b}.$

При помощи символического изображения вычисления чрезвычайно упрощаются, особенно, в сложных формулах, как напр., уравнение (5). Для того, чтобы проверить правильность этого уравнения обычным аналитическим, путем лучше всего исходить из

$$rot\,[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

и вычислить компонент x в правой части из уравнения (5); он приводится после некоторых преобразований к виду

$$\frac{\partial}{\partial y}(a_1 b_2 - a_2 b_1) - \frac{\partial}{\partial z}(a_3 b_1 - a_1 b_3);$$

то-же производится и для вычисления компонентов x и z.

Если в формулах (1)—(5) заменить вектор $\mathfrak{b}$ знаком ∇, то

$$(1') \quad \nabla\nabla a = div\, grad\, a = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = \nabla^2 a = \Delta a^{1)},$$

$$(2') \quad [\nabla\nabla a] = rot\, grad\, a = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3') \quad \nabla(\nabla \mathfrak{a}) = grad\ div\ a,$$

$$(4') \quad \nabla[\nabla \mathfrak{a}] = div\ rot\ \mathfrak{a} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(5') \quad [\nabla[\nabla \mathfrak{a}]] = rot\ rot\ \mathfrak{a} = \nabla(\nabla \mathfrak{a}) - (\nabla\nabla)\mathfrak{a}$$

$$= grad\ div\ \mathfrak{a} - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{a}}{\partial z^2}\right).$$

$$= grad\ div\ \mathfrak{a} - i\nabla^2 a_1 - j\nabla^2 a_2 - k\nabla^2 a_3 =$$

В заключение необходимо сказать относительно уравнения (4′), что когда $div\ \mathfrak{c}$ в рассматриваемом пространстве равна нулю, то $\mathfrak{c}$ должно быть представлено ротором другого вектора.

---

1) Способ изображения, принятый *Lamé*.

Часть. II

Применения к некоторым областям физики.

§ 28 Введение.

Мы исследовали два рода векторов: осевые и полярные (§ 2), или — если векторы даны, как функции точек т. е. определяют собой векторное поле — векторы, дивергенция которых равна нулю, или же векторы, — ротор которых равен нулю. В первом случае мы имеем дело с областью без источника, во втором—с областью без вихрей; в первом случае мы можем представить вектор посредством ротора другого вектора, во втором—градиентом некоторой скаларной величины. В зависимости от того или другого случая, мы говорим о соленоидальном, или о потенциальном векторе

Самый общий случай векторного поля определяет сумма соленоидального и потенциального векторов, соответственно общему представлению вектора посредством суммы осевого и полярного векторов.

Таким образом, мы рассматриваем следующие случаи векторного поля. Пусть во всем пространстве

(1) $$rot\, \mathfrak{a} = 0, \quad div\, \mathfrak{a} = 0,$$

тогда, согласно § 23, $\mathfrak{a} = grad\, V$; следовательно,

(1') $$div\, \mathfrak{a} = \nabla^2 V = 0$$

Одно из частных решений этого дифференциального уравнения есть

$$V=\frac{m}{r}+n,$$

где m и n обозначают произвольные постоянные. Если уравнение (1') удовлетворяется для всего рассматриваемого пространства, т. е. также и при $r=0$, то произвольная постоянная $m=0$ и таким образом V приводится к произвольной постоянной; следовательно,

$$\mathfrak{a}=0.$$

(2) Если $\quad rot\,\mathfrak{a}=0, \quad div\,\mathfrak{a}\neq 0,$

мы имеем область источника без вихря с **потенциальным векторм** $\mathfrak{a}$.

(3) Если $\quad rot\,\mathfrak{a}\neq 0, \quad div\,\mathfrak{a}=0,$

то мы имеем вихревую область без источника с **соленоидальным вектором** $\mathfrak{a}$.

(4) Если $\quad rot\,\mathfrak{a}\neq 0, \quad div\,\mathfrak{a}\neq 0,$

то мы можем произвести следующее разложение. Пусть

$$div\,\mathfrak{a}=\rho,$$
$$rot\,\mathfrak{a}=\mathfrak{r},$$

кроме того, положим

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2,$$

где $\mathfrak{a}_1$ — потенциальный вектор, а $\mathfrak{a}_2$ — соленоидальный; тогда

$$div\,\mathfrak{a}_1=\rho, \quad rot\,\mathfrak{a}_1=0,$$
$$div\,\mathfrak{a}_2=0, \quad rot\,\mathfrak{a}_2=\mathfrak{r}.$$

В теории потенциала преимущественно встречается потенциальный вектор, в гидро-динамике же соленоидальный, что же касается электрических и магнитных явлений, то для их представления служит сложный вектор.

Согласно сказанному, мы рассмотрим в следующих трех главах вопрос о применении векторного анализа к теоретической физике. Первоначально—некоторые общие теоремы теории потенциала, а вместе с тем и теорию потенциального вектора, затем—теоремы гидродинамики и, следовательно, теорию соленоидального вектора и, в заключение, представление электрических и магнитных явлений—соединив оба вектора вместе.

Глава I.

Некоторые теоремы из теории потенциала.

§ 29. Значение потенциала в механике.

Скалярную величину V можно представить градиентом вектора $\mathfrak{a}$, когда $rot\,\mathfrak{a}=0$; она называется **скалярным потенциалом** потенциального вектора.

Из § 18 следует: компоненты потенциального вектора в направлении $\mathfrak{s}$ с компонентами s_1, s_2, s_3 мы получаем дифференцируя потенциал по этому направлению.

Если $\mathfrak{a}$ является вектором — силой, определяемым потенциалом V, то работа производимая данной силой приложенной к материальной точки движущейся вдоль замкнутого пути равна нулю, потому что, согласно § 18, величина работы зависит лишь от начальной и конечной точки

$$\int_1^2 \mathfrak{a}\,d\mathfrak{s} = V_2 - V_1.$$

Если сила, действующая на материальную точку обладает потенциалом, то нам всегда известен интеграл дифференциальных уравнений движения; а именно—интеграл живых сил. Ибо, производя скалярное умножение дифференциального уравнения движения

$$(1) \qquad m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{a} = \nabla V$$

на $\frac{dr}{dt}$, получим

$$m\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt}\overline{\mathfrak{r}}^2 = \mathfrak{a}\frac{dr}{dt}\overline{\mathfrak{r}} = \frac{1}{dt}(d\mathfrak{r}\nabla)V = \frac{dV}{dt},$$

где под дифференциалом dv понимается изменение V при движении в направлении пути $d\mathfrak{r}$ в элемент времени dt. Интегрируя, имеем

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - V = const.$$

Силы, обладающие потенциалом, называются консервативными в данном случае потенциал называют также силовой функцией. Центральные силы суть консервативные силы.

Выражение силы, действующей согласно закону притяжения Ньютона на материальные точки m_1 и m_2 будет

$$(2) \qquad \mathfrak{a} = -\frac{K m_1 m_2}{r^2}\overline{\mathfrak{r}}.$$

Потенциал этой силы

$$(3) \qquad V = \frac{K m_1 m_2}{r}.$$

Простое вычисление показывает, что в этом случае за исключением $r=0$, для пространства повсюду действительно уравнение

$$(4) \qquad div\,\mathfrak{a} = \nabla\nabla V = \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2} = 0;$$

Это дифференциальное уравнение известно под названием уравнения Лапласа.

§ 30. Потенциал Ньютона.

Под потенциалом часто подразумевают силовую функцию закона притяжения Ньютона при непрерывном или прерывном распределении массы. Этот потенциал является функцией которая удовлетворяет при подобном распределении массы в трехмерном бесконечном пространстве следующим условиям.

В любой точке пространства, за исключением определенных геометрических форм, не обладающих всеми тремя измерениями (как напр.: точки, линии, поверхности)

$$\nabla^2 V = div\, \mathfrak{a} = 4\pi\rho, \tag{1}$$

где $\rho(\mathfrak{r})$ является плотностью системы масс в точке

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k} = r\overline{\mathfrak{r}}$$

Величина V и ее первые производные по $\mathfrak{r}$ являются повсюду непрерывными функциями, опять таки — за исключением выше оговоренных геометрических представлений.

Произведения $\mathfrak{r}V$, $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\nabla)V$ повсюду имеют конечные значения.

Для точек и линий разрыв функции V и ее первых производных можно не рассматривать более подробно.

Если же для поверхности функция V и ее первые производные прерывны, то таковые должны ограничиваться прерывностью, а также прерывностью ее первых производных в направлении нормали $\mathfrak{n}$ к поверхности при прохождении ее через последнюю; разрывы должны даваться наперед заданными функциями ω, χ, а именно:

$$((\overline{\mathfrak{n}}\nabla)V)_1 + ((\overline{\mathfrak{n}}\nabla)V)_2 = 4\pi\omega, \tag{2}$$

$$V_1 - V_2 = 4\pi\chi, \tag{3}$$

где индексы указывают различия для величины обоих сторон поверхности, а нормали, в свою очередь, направлены наружу.

Эти условия однозначно определяют потенциал, удовлетворяющая им функция V гласит:

$$(4) \qquad -V = \int \frac{\rho \cdot d\tau}{r} + \int \frac{\omega}{r}\, df - \int \left(\chi\, (\overline{\mathfrak{n}}\, \nabla) \frac{1}{r}\right) df.$$

§ 31. Вспомогательные теоремы Грина.

Согласно теореме Гаусса:

$$(1) \qquad \int div\, \mathfrak{a}\, d\tau = \int \mathfrak{a}\, d\mathfrak{o};$$

если взамен $\mathfrak{a}$, подставим произведение вектора $\mathfrak{a}$ и скаларной величины V (причем как вектор, так и скалара в рассматриваемой области предполагаются однозначными и непрерывными), то получаем

$$(2) \qquad \int div\, (\mathfrak{a} \cdot V)\, d\tau = \int (\mathfrak{a} V) \cdot d\mathfrak{o}.$$

Пусть

$$div\, (\mathfrak{a} \cdot V) = V\, div\, \mathfrak{a} + \mathfrak{a}\, grad\, V;$$

положив $\mathfrak{a} = grad\, U$, имеем

$$(3) \qquad \int (V \nabla V)\, d\mathfrak{o} = \int (V \nabla^2 U)\, d\tau + \int (\nabla U \nabla V)\, d\tau.$$

Переменив местами U и V, получаем соответственное уравнение. Вычитая из первого второе, получаем

$$(4) \qquad \int V \nabla U - U \nabla V)\, d\mathfrak{o} = \int (V \nabla^2 U - U \nabla^2 V)\, d\tau.$$

Если $V = U$, то из уравнения (3) следует

$$(5) \qquad \int (V \nabla V)\, d\mathfrak{o} = \int (V \nabla^2 V + (\nabla V)^2)\, d\tau.$$

Если, наконец, V удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2 V = 0$, то

$$(6) \qquad \int V \nabla V\, d\mathfrak{o} = \int (\nabla V)^2 d\tau.$$

Уравнения (4) — (6) были первоначально выведены Грином.

Интеграл уравнения Лапласа

$$V = \frac{1}{r}$$

имеет в точке $r = 0$ бесконечно большое значение; если к этой функции применяются теоремы Грина, с (3) по (6), то для рассматриваемой части пространства необходимо исключить точку $r = 0$ и распространить интеграл, взятый по поверхности, на эту поверхность исключения. Мы помещаем точку в сферу бесконечно малого радиуса. Интеграл, взятый по поверхности относительно этой сферы, вычисляется без каких-либо затруднений. Первоначально вычисляем

$$\int V \nabla U d\mathfrak{o} = \int \frac{1}{r} \nabla U d\mathfrak{o}.$$

Если обозначить через $\overline{\mathfrak{n}}$ направление элемента поверхности $d\mathfrak{o}$ и через $(\nabla U \cdot \overline{\mathfrak{n}})_{max}$ — наибольшее значение, принимаемое заключенной в скобки величиной на поверхности сферы, то

$$\operatorname*{Lim}_{r=0} \left| \int \frac{1}{r} \nabla U \cdot d\mathfrak{o} \right| \leqq \operatorname*{Lim}_{r=0} \left| (\nabla U \cdot \overline{\mathfrak{n}})_{max} \int \frac{d\mathfrak{o}}{r} \right| = 0.$$

Далее, если радиус сферы настолько мал, что значения U в различных точках бесконечно мало отличаются от среднего значения U_0 в точке $r = 0$, то

$$(7) \quad \int U \nabla V \cdot d\mathfrak{o} = \int U \nabla \frac{1}{r} \cdot d\mathfrak{o} = - U_0 \int \frac{d\mathfrak{o}}{r^2} = - 4\pi U_0.$$

Интеграл, взятый по об'ему относительно малой сферы, стремится с уменьшением величины r к нулю, если при этом $\nabla^2 U$ конечно; таким образом, об'емный интеграл в уравнении (4) остается без изменений. Само же уравнение (4) переходит в силу сказанного в

$$(8) \quad \int\left(\frac{1}{r}\nabla U - U\nabla\frac{1}{r}\right) d o - 4\pi U_0 = \int\frac{1}{r}\nabla^2 U d\tau\,^{1)},$$

В этой формуле интеграл распространен по об'ему, или по заключающей об'ем поверхности, причем в этих границах функция U и ее первые производные должны быть непрерывны.

§ 32. Вывод потенциальний функции из характерных условий.

Уравнение (8) § 31 дает нам соотношение между функцией U и ее первой и второй производными; оно должно удовлетворяться для любой функции и ее первой производной в тех пределах, в которых, как сама функция, так и ее производная, обладают конечными значениями. Таким образом, потенциальная функция V должна также удовлетворять этому уравнению при том условии, что точки перерыва и линии, которые мы выделяем в сферы бесконечно малого радиуса и трубкообразные поверхности, не подлежат нашему рассмотрению. В таком случае стоящий налево интеграл, взятый по поверхности, распространяется: 1. На поверхность бесконечно большой сферы, заключающей все пространство. 2. На поверхность, заключающую в себе поверхности, как точек перерыва, так и линий. 3. На поверхности, заключающие в себе поверхности точек перерыва с заранее данными скачками.

[1]) Правильность огрицательного знака перед $4\pi U_0$ можно установить, если вспомнить, что нормаль к элементу поверхности малой сферы, внутренность которой считается внешним пространством — если таковая часть пространства не подлежит нашему рассмотрению — должна быть согласно предыдущим положениям направлена внутрь сферы, в то время, как нормаль к элементу поверхности другого интеграла должна быть направлена во внешнее пространство,

Таким образом — принимая во внимание условия § 30 —

$$\text{к (1)} \begin{cases} \int\limits_{\infty} \frac{1}{r} \nabla V \cdot d\mathfrak{o} = \\ = \int\limits_{\infty} r (\mathfrak{r} \nabla V) \frac{do_1}{r} \leqq (r \mathfrak{r} \nabla V)_{\max}^{r=\infty} \cdot \int \frac{d o_1}{r} = 0, \end{cases}$$

где $d o_1$ обозначает абсолютную величину элемента поверхности $d \mathfrak{o}_1$ сферы радиуса, равного единице, наблюдаемой из центра сферы под тем же углом, что и $d \mathfrak{o}$; далее:

$$-\int\limits_{\infty} V \nabla \frac{1}{r}\, d\mathfrak{o} = \int\limits_{\infty} V \frac{1}{r^2} r^2 d\, \mathfrak{o}_1 \leqq (r\, V)_{\max}^{r=\infty} \cdot \int\limits_{\infty} \frac{d o_1}{r} = 0.$$

$$\text{к (2)} \qquad \int \left(\frac{1}{r} \nabla V - V \nabla \frac{1}{r}\right) d\mathfrak{o} = 0,$$

в силу конечных значений V, r и ее первых производных на поверхности, а также в силу сходимости относительно нуля величины поверхности:

$$\text{к (3)} \begin{cases} \int \left(\frac{1}{r} \nabla V - V \nabla \frac{1}{r}\right) d\mathfrak{o} = \int \frac{1}{r} \left\{ ((\overline{\mathfrak{n}} \nabla) V)_1 + \right. \\ \left. + ((\overline{\mathfrak{n}} \nabla) V)_2 \right\} df - \int (V_1 - V_2) (\overline{\mathfrak{n}} \nabla) \frac{1}{r} \cdot df. \end{cases}$$

В этой формуле мы берем совместно противолежащие — относительно обоих сторон прерывной поверхности — элементы и лишь со стороны перерыва интегрируем элементы поверхности df. В силу выше упомянутых определений прерывности поверхности мы можем написать выражение:

$$4\pi \int \frac{\omega}{r} df - 4\pi \int \chi\, (\overline{V} \nabla) \frac{1}{r}\, df.$$

Прибавляя интеграл, взятый по поверхности, и принимая во внимание величину $4\pi\rho$ для $\nabla^2 V$ в интегрируемой части пространства, мы получим из уравнения (8) следующую формулу:

$$(1)\qquad -V_0 = \int \frac{\rho}{r}\, d\tau + \int \frac{\omega}{r}\, df - \int \chi (\bar{\mathfrak{n}} \nabla) \frac{1}{r} df,$$

где V_0 есть величина потенциальной функции V в той точке пространства, от которой берутся расстояния r об'емных элементов $d\tau$, или поверхностых элементов df. Т. к. величины ρ, ω, χ даны, как функции x, y, z, или — что то же — как функции $\mathfrak{r}$, представляющие собой переменные интеграции, то величина V_0 может быть отсюда определена.

Функция V_0 удовлетворяет всем условиям, поставленным в § 30; необходимо добавить лишь несколько слов о ее однозначности. Если V_0 и V_0' являются двумя функциями, удовлетворяющими поставленным условиям, до для разности $U = V_0 - V_0'$. Необходимо, чтобы:

1. $\nabla^2 U = 0$ (за исключением определенных, не обладающих всеми тремя измерениями, геометрических представлений: точек, линий, плоскостей).

2. Функция U и ее первая производная по $\mathfrak{r}$ были конечны и непрерывны, за исключением определенных геометрических форм, не обладающих всеми тремя измерениями: точек, линий, плоскостей; прерывных поверхностей U не существует.

3. Произведения $\mathfrak{r}\, U$ и $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}\nabla)\, U$ повсюду сохраняют конечные значения.

Если мы, исключив прерывы функций посредством сферических и трубчатых поверхностей, применим к ней уравнение (6) Грина, то, аналогично сказанному выше, левая часть исчезает; последнее требует, чтобы $(\nabla U)^2 = 0$, откуда, применяя условие 3, следует, что сама функция U должна равняться нулю. Этим самым доказана однозначность потенциальной функции.

§ 33. Значение отдельных членов решения.

Полученное решение дает силовую функцию закона притяжения Ньютона при сполошном или прерывном распределении массы; т. к., частная производная по какому-либо направлению в пространстве дает нам величину действующей силы по этому направлению, которая вместе с тем служит выражением закона Ньютона.

Сказанное нетрудно увидеть из первого члена решения:

$$\int \frac{\rho}{r} d\tau.$$

Этот интеграл представляет собой выражение потенциала Ньютона при равномерно распределенной массе в пространстве по отношению к какой-либо точке с массой, равной единице, удаленной от элемента $d\tau$ на расстояние r. Величина ρ обозначает плотность равномерно распределенной массы в пространстве, или в силу того, что

$$\rho = \frac{1}{4\pi} \nabla^2 V = \frac{1}{4\pi} div\, \mathfrak{a}$$

— плотность вектора $\mathfrak{a}$ в точке x, y, z. Если $div\, \mathfrak{a}$, или ρ, положительны, то эта точка является точкой источника, если же величина ρ отрицательна, то — точкой падения.

Вторую часть решения, т. е. интеграл $\int \frac{\omega}{r} df$, мы можем точно также рассматривать, как выражение ньютонова потенциала некоторой системы материальных точек, а именно распределения масс на поверхности перерыва, по отношению к которой берется интеграл, — так называемый поверхностный слой ω, который называют также плотностью поверхности.

Третье выражение решения может быть приведено к виду, аналогичному первым двум.

Для того, чтобы это показать, мы пишем:

$$\int \chi (\overline{n} \nabla) \frac{1}{r} df = \int \chi \frac{d \frac{1}{r}}{dn} df =$$

$$= \int \chi \frac{1}{dn} \frac{1}{r + dr} df - \int \chi \frac{1}{dn} \frac{1}{r} df.$$

Полагая

$$\chi\frac{1}{d\,n}=\varphi$$

при условии, что при наименьшем значении dn величина $\varphi\cdot dn$ всеже принимает конечное значение, мы получаем оба интеграла в том же виде, как и в первом случае. Величина φ иди $\chi\frac{1}{dn}$ представляет собой поверхностный слой, или плотность на поверхности перерыва, который действует на внешние точки, согласно закону Ньютона.

Плотность поверхности, к которой относятся оба интеграла, распределена по обоим сторонам поверхности перерыва так, что первый интеграл охватывает площадь, которая отталкивается от притягиваемой точки и тесно примыкает к поверхности перерыва, а другой относится к площади, которая тесно примыкает к площади перерыва с другой стороны. Плотность поверхности для двух противоположных элементов, расположенных друг к другу на растоянии $d\,n$, возрастает с уменьшением $d\,n$ до бесконечности, так что

$$Lim\,(\varphi\quad dn)$$

равен для данной точки наперед заданной величине χ. В силу этого разность обоих интегралов принимает конечную величину, потому что

$$\int\chi\frac{1}{dn}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r+d\,r}\right)df=\int\varphi\;\frac{d\,r}{r^2}d\,f=\int\chi\cos\,(\mathrm{r},\,\mathrm{n})\frac{d\,f}{r^2}.$$

Взамен этого, мы можем сказать, что

$$\int\chi(\overline{\mathrm{n}}\,\nabla)\frac{1}{r}\,d\,f\equiv\int(\chi\,\overline{\mathrm{n}})\,\nabla\frac{1}{r}\,df$$

представляет собой сумму двух равных, взаимно противоположных, бесконечно близких, распределенных по обоим сторонам поверхности перерыва слоев которые облацают такого рода бесконечно большой плотностью, что произведение плотности на расстояние между обоими обкладками приближается с уменьшеним этого расстояния к пределу

$$\chi = \frac{1}{4\pi}(V_1 - V_2)$$

Такого рода перерывы пазываются двойными обкладками, или двойными источниками; произведение $(\chi\, \overline{\mathfrak{n}})$ называетя — моментом двойного источника абсолютная величина этого момента равна 4π-ой части скачка от V поверхности перерыва.

Если $\chi = \varphi\, dn$ постоянно по всей поверхности перерыва, то потенциал такой поверхности, обложенной двойным источником, изображается так;

$$\chi \int \frac{cos(\mathfrak{r}, \mathfrak{n})}{r^2}\, df = \chi\, \Omega,$$

где Ω обозначает телесный угол, под которым поверхность видна из начала координат.

Глава 2.

Некоторые теоремы гидродинамики.

§ 34. Введение в теорию сил, действующих по поверхности.

Если движение системы рассматривается не так, как движение отдельных материальных точек, а как это принято при изучении движения жидкостей, где в основу рассужений берется неразрывная масса, то рациональнее, наряду с силами, действующими на элементы об'ема с содержанием массы, вводить силы действующие на тело по его поверхности. Эти действующие по поверхности силы мы полагаем пропорциональными абсолютной величине do, т. е. — элементу поверхности $d\,o$, внешняя нормаль котораго должна совпадать с направлением $\overline{\mathfrak{n}}$; в общем случае они зависят от координат точки и направления элемента поверхности; поэтому мы будем обозначать индексом n силу $\mathfrak{P}_n$, отнесенную к элементу поверхности с нормалью $\bar{\mathfrak{n}}$.

В силу сказанного, уравнения движения переходит, согласно § 26, в

$$\int\left(\rho\,\mathfrak{P}\,d\tau+\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}\,do-\rho\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\,d\tau\right)=0, \tag{1}$$

$$\int\left[\mathfrak{r},\rho\,\mathfrak{P}\,d\tau+\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}\,do-\rho\,\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\,d\tau\right]=0, \tag{2}$$

где $\mathfrak{P}$ обоначает силу, приложенную к единице массы, ρ плотность, а $\mathfrak{r}=x\mathfrak{i}+y\mathfrak{j}+z\mathfrak{k}$ отнесено к неподвижным осям координать в пространстве и дает положение элемента об'ема и поверхности.

Так как эти уравнения должны распространяться на любую частицу данной среды, а следовательно, и на элементы об'ема, то из первого уравнения следует, что

$$\int\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}\,do$$

распространенный по поверхности бесконечно малого элемента, является бесконечно малой величиний третьего порядка. Вычисляя этот интеграл для частного случая, когда элемент об'ема дан в виде бесконечно малого тетраедра с гранями do, $\mathfrak{i}d\mathfrak{o}$, $\mathfrak{j}d\mathfrak{o}$ $\mathfrak{k}d\mathfrak{o}$ мы заключаем, что

$$\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}=\mathfrak{P}_x\,(\mathfrak{i}\,d\bar{\mathfrak{o}})+\mathfrak{P}_y\,(\mathfrak{j}\,d\bar{\mathfrak{o}})+\mathfrak{P}_z\,(\mathfrak{k}\,d\bar{\mathfrak{o}}).$$

Для какой-либо части этой среды, или даже для всей среды, мы можем в силу сказанного написать

$$\int\mathfrak{P}_{\mathfrak{n}}\,do=\int(\mathfrak{P}_x\,(\mathfrak{i}\,d\mathfrak{o})+\mathfrak{P}_y\,(\mathfrak{j}\,d\mathfrak{o})+\mathfrak{P}_z\,(\mathfrak{k}\,d\mathfrak{o})).$$

Правую часть можно преобразовать согласно теореме Гаусса в интеграл, взятый по об'ему

$$\int\left(\frac{\partial\mathfrak{P}_x}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{P}_y}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{P}_z}{\partial z}\right)d\tau.$$

ибо

$$\int \mathfrak{P}_x (\mathfrak{i}\, d\,\mathfrak{o}) = \mathfrak{i} \int (\mathfrak{i}\, \mathfrak{P}_x)(\mathfrak{i}\, d\,\mathfrak{o}) + \mathfrak{j} \int (\mathfrak{j}\, \mathfrak{P}_x)(\mathfrak{i}\, d\,\mathfrak{o}) + \mathfrak{k} \int (\mathfrak{k}\, \mathfrak{P}_x)(\mathfrak{i}\, d\,\mathfrak{o})$$

или же

$$\int (\mathfrak{i}\, \mathfrak{P}_x)(\mathfrak{i}\, d\,\mathfrak{o}) = \int \mathfrak{i}\, (\mathfrak{i}\, \mathfrak{P}_x)\, d\,\mathfrak{o} =$$

$$= \int div\, (\mathfrak{i}\, (\mathfrak{i}\, \mathfrak{P}_x))\, d\,\tau = \left(\mathfrak{i} \int \frac{\partial\, \mathfrak{P}_x}{\partial\, x}\right) d\,\tau$$

и соответственно

$$\int (\mathfrak{j}\, \mathfrak{P}_x)(\mathfrak{i}\, d\,\mathfrak{o}) = \left(\mathfrak{j} \int \frac{\partial\, \mathfrak{P}_x}{\partial\, x}\, d\,\tau\right)$$

$$\int (\mathfrak{k}\, \mathfrak{P}_x)(\mathfrak{i}\, d\,\mathfrak{o}) = \left(\mathfrak{k} \int \frac{\partial\, \mathfrak{P}_x}{\partial\, x}\, d\,\tau\right);$$

отсюда

$$\int \mathfrak{P}_x (\mathfrak{i}\, d\,\mathfrak{o}) = \mathfrak{i} \left(\mathfrak{i} \int \frac{\partial\, \mathfrak{P}_x}{\partial\, x}\, d\,\tau\right) + \mathfrak{j} \left(\mathfrak{j} \int \frac{\partial\, \mathfrak{P}_x}{\partial\, x}\, d\,\tau\right)$$

$$+ \mathfrak{k} \left(\mathfrak{k} \int \frac{\partial\, \mathfrak{P}_x}{\partial\, x}\, d\,\tau\right) = \int \frac{\partial\, \mathfrak{P}_x}{\partial\, x}\, d\,\tau.$$

Производя преобразование левой части уравнения (1), получаем об'емный интеграл, причем должно иметь силу равенство:

$$\rho \frac{d^2\, \mathfrak{r}}{d\, t^2} = \rho\, \mathfrak{P} + \frac{\partial\, \mathfrak{P}_x}{\partial\, x} + \frac{\partial\, \mathfrak{P}_y}{\partial\, y} + \frac{\partial\, \mathfrak{P}_z}{\partial\, z}. \tag{3}$$

Интеграл уравнения (2), взятый по поверхности, мы можем подвергнуть точно такому же преобразованию. Таким образом,

$$\int [\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_n]\, d\,o = \int ([\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_x](\mathfrak{i}\, d\,\mathfrak{o}) + [\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_y](\mathfrak{j}\, d\,\mathfrak{o}) + [\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_z](\mathfrak{k}\, d\,\mathfrak{o}))$$

$$= \int \left(\frac{\partial}{\partial\, x}[\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_x] + \frac{\partial}{\partial\, y}[\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_y] + \frac{\partial}{\partial\, z}[\mathfrak{r}, \mathfrak{P}_z]\right) d\,\tau$$

$$= \int \left(\left[\mathfrak{r}, \frac{\partial\, \mathfrak{P}_z}{\partial\, x}\right] + [\mathfrak{i}, \mathfrak{P}_x] + \ldots\right) d\,\tau.$$

По подстановке из уравнения (2) следует

$$\left[\mathfrak{r}, \rho\,\mathfrak{P} + \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial z} - \rho \frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2}\right]$$
$$= -[\mathfrak{i}\,\mathfrak{P}_x] - [\mathfrak{j}\,\mathfrak{P}_y] - [\mathfrak{k}\,\mathfrak{P}_z].$$

Согласно формуле (3), левая часть этого уравнения обращается в нуль, т. е. компоненты, находящегося в правой части вектора, должны равняться нулю, т. е.

$$(4)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{P}_x\,\mathfrak{j}) = (\mathfrak{P}_y\,\mathfrak{i}), \\ (\mathfrak{P}_y\,\mathfrak{k}) = (\mathfrak{P}_z\,\mathfrak{j}), \\ (\mathfrak{P}_z\,\mathfrak{i}) = (\mathfrak{P}_x\,\mathfrak{k}). \end{cases}$$

§ 35 Уравнения Эйлера для жидкостей без трения.

При исследовании движения жидкостей без трения принимается, что

$$(1)\qquad (\mathfrak{P}_x\,\mathfrak{j}) = (\mathfrak{P}_y\,\mathfrak{k}) = (\mathfrak{P}_z\,\mathfrak{i}) = 0$$

и что абсолютные величины сил давления $\mathfrak{P}x$, $\mathfrak{P}y$, $\mathfrak{P}z$ равны друг другу. Следовательно,

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_x = p\,\mathfrak{i}, \\ \mathfrak{P}_y = p\,\mathfrak{j}, \\ \mathfrak{P}_z = p\,\mathfrak{k}, \end{cases}$$

и уравнение (3) принимает вид

$$(3)\qquad \rho \frac{d^2 \mathfrak{r}}{d t^2} = \rho\,\mathfrak{P} + \nabla p\,.$$

Эти основные уравнения гидродинамики получают вид Эйлеровых уравнений, если заменить полное изменение по времени скорости точки через вектор $\mathfrak{r}$, т. е. $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ или $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$, суммой местного и стационарного изменения; согласно уравнению (4) § 25,

$$(4)\qquad \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + {}^1\!/_2\,\nabla\,\mathfrak{v}^2 - [\mathfrak{v}\;rot\,\mathfrak{v}] = \mathfrak{P} + \frac{1}{\rho}\,\nabla p\,.$$

К этому необходимо еще добавить другое основное уравнение, а именно, условие несжимаемости, согласно которому поступающая в элемент об'ема масса жидкости равна нулю. Масса жидкости, взятая в единицу времени и на единицу поверхности равна произведению плотности на скорость. Если плотность постоянна, то

(5) $$div\, \mathfrak{v} = 0\,.$$

§ 36. Теоремы вихревых движений Гельмгольца.

Если сила $\mathfrak{P}$ обладает потенциалом V, то

$$\mathfrak{P} = \nabla V,$$

и уравнение (4) § 35 будет гласить

(1) $$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{v} = \nabla\left(V + \frac{1}{\rho}\,p\right).$$

Отсюда может быть выведено уравнение, дающее общие свойства движения жидкостей под действием сил, обладающих потенциалом. (Силы трения не принадлежат к таковым). Выше нами было показано, что вращение градиента равно нулю; отсюда следует для данного случая

(2) $$rot\left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{v}\right) = 0\,.$$

Если мы обозначим скорость вращения

$$\frac{1}{2}\,rot\,\mathfrak{v} = \mathfrak{w},$$

то уравнение получит вид

$$2\,\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} - rot\,[\mathfrak{v}\,rot\,\mathfrak{v}] = 0\,.$$

Применяя уравнение (5) § 27, имеем

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{w} - (\mathfrak{w}\,\nabla)\,\mathfrak{v} = 0,$$

или, согласно уравнению (4) § 19,

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{d t}=(\mathfrak{w} \nabla) \mathfrak{v}. \tag{3}$$

Это уравнение дающее свойства движения жидкостей без трения; оно дано Гельмгольцем.

Те частицы воды, которые еще не имеют вращательного движения, не получают такового и в дальнейшем.

Направление вектора $\mathfrak{w}$ совпадает, согласно определению, с осью вращения, или—по Гельмгольцу с вихревой линией через соответствующую точку. „Вихревые линии являются линиями, проходящими через жидкость так, что их направление повсюду совпадает с направлением мгновенной оси вращения частиц жидкости."

Расстояние двух соседних частиц на одной и той же вихревой линии в начале промежутка элемента времени dt дается по направлению и величине выражением $(\varepsilon \cdot \mathfrak{w})$, В конце промежутка времени dt расстояние будет

$$(\varepsilon \mathfrak{w})+\frac{d}{d t}(\varepsilon \mathfrak{w}) d t,$$

или применяя уравнение (3),

$$=(\varepsilon \mathfrak{w})+(\varepsilon \mathfrak{w} \nabla) \mathfrak{v} \, d t=(\varepsilon \mathfrak{w})+\varepsilon(\mathfrak{w} \nabla) \mathfrak{v} \, d t=$$
$$=\varepsilon\left(\mathfrak{w}+\frac{d \mathfrak{w}}{d t} d t\right),$$

что обозначает, что линия, соединяющая обе частицы, совпадает в направлении с осью вращения в конце элемента времени dt; таким образом, частицы остаются на одной и той же вихревой линии.

Каждая вихревая линия продолжает и в дальнейшем состоять из одних и тех же частиц в течение всего времени покуда она проходит через жидкость вместе с этими частицами.

Вихревыми нитями Гельмгольц называет образуемые вихревыми линиями трубки с частицами жидкости, проходящими через бесконечно малый замкнутый элемент поверхности кривой.

Нетрудно видеть, что произведение скорости вращения и поперечного сечения остается постоянным по всей длине одной и той же вихревой нити, так как при переходе от одного поперечного сечения одной и той же нити к соседнему изменение интеграла этого произведения равно, согласно уравнению (5) § 5,

$$(\mathfrak{w}\,\nabla)\int \mathfrak{w} \cdot d\,\mathfrak{o} = 0.$$

Величину вектора $\mathfrak{w}$ называют силой вихря; произведение силы вихря на поперечное сечение вихревой нити называется моментом вихревой нити. Отсюда следует что вихревые нити, а следовательно, также и вихревые линии должны быть постоянно замкнутыми.

Если сила $\mathfrak{P}$ не обладает потенциалом, то

$$(4) \qquad rot\left(\frac{\partial\,\mathfrak{v}}{\partial\,t} + (\mathfrak{v}\,\nabla)\,\mathfrak{v}\right) \equiv 2\left(\frac{d\,\mathfrak{w}}{d\,t} - (\mathfrak{w}\,\nabla)\,\mathfrak{v}\right) = rot\,\mathfrak{P}.$$

Отсюда обратно следует, что если движение частицы происходит так, что она обладает потенциалом скорости, т. е. если

$$rot\,\mathfrak{v} = 2\,\mathfrak{w} = 0\,,$$

то движение происходит под действием сил, обладающих потенциалом; в данном случае уравнение (1) значительно упрощается, так как

$$(5) \qquad \frac{\partial\,\mathfrak{v}}{\partial\,t} + {}^1\!/_2\,\nabla\,\mathfrak{v}^2 = \nabla\left(V + \frac{1}{\rho}\,p\right).$$

Положив $\mathfrak{w} = \nabla a$, получаем после интегрирования

$$(6) \qquad \frac{\partial\,a}{\partial\,t} + {}^1\!/_2\,(\nabla a)^2 = V + \frac{1}{\rho}\,p + \text{функция времени}$$

Условие несжимаемости будет в этом случае гласить:

$$\nabla^2 a = 0 .$$

§ 37. Соленоидальный вектор.

В общем случае скорость частицы в несжимаемой жидкости должна удовлетворять обоим дифференциальным уравнениям:

$$(1) \qquad div\, \mathfrak{v} = 0$$

$$2) \qquad rot\, \mathfrak{v} = 4\pi \mathfrak{w} .$$

Таким образом, согласно § 28, вектор скорости частицы является соленоидальным вектором области, не обладающей источником. Его распределение определяется из уравнений (1) и (2).

Так как $div\, \mathfrak{v} = 0$, то согласно § 27, $\mathfrak{v}$ может быть представлено вращением другого вектора, поэтому положим

$$(3) \qquad \mathfrak{v} = rot\, \mathfrak{u} .$$

Тогда (2) переходит в

$$(4) \qquad rot\, rot\, \mathfrak{u} \equiv grad\, div\, \mathfrak{u} - \nabla^2 \mathfrak{u} = 4\pi \mathfrak{w} .$$

Самым общим выражением вектора является сумма вращения другого вектора и градиента скалярной величины. Следовательно, мы можем написать

$$\mathfrak{u} = rot\, \mathfrak{u}' + grad\, \mathfrak{u}'' .$$

Уравнение (3) определяет лишь первую часть вектора $\mathfrak{u}$, в то время, как $grad\, u''$ может быть взят произвольно, потому что

$$\mathfrak{v} = rot\, \mathfrak{u} = rot\, rot\, \mathfrak{u}' ,$$

так как

$$rot\, grad\, u'' = 0.$$

Таким образом, вектор $\mathfrak{v}$ может быть представлен вектором, представляемым в свою очередь, вращением другого вектора, т. е. вектора, дивергенция которого равна нулю. В силу этого мы можем вектор $\mathfrak{u}$ в уравнении (3) связать дополнительным условием

$$\mathit{div}\,\mathfrak{u} = 0\,. \tag{5}$$

Тогда из уравнения (4) следует

$$\nabla^2 \mathfrak{u} = -4\pi\mathfrak{w}\,. \tag{6}$$

Это уравнение равносильно трем аналитическим уравнениям между тремя компонентами; вид этих уравнений тот же, что и в § 30. Если мы эти выводы применим к данному случаю, то можно написать:

$$\mathfrak{u} = \int \frac{\mathfrak{w}}{r}\, d\tau\,, \tag{7}$$

при условии наперед заданной непрерывности $\mathfrak{u}$ во всем пространстве и в предположении, что в бесконечности $\mathfrak{u}$, как и $\frac{1}{r}$, обращаются в нуль, что обусловливает превращение в бесконечности $\mathfrak{v}$ и $\frac{1}{r_2}$ в нуль. В виду аналогии с скалярным потенциалом $\mathfrak{u}$ обозначается, как **векторный потенциал векторного распределения** $\mathfrak{w}$.

То, что это решение удовлетворяет условию (5), можно вывести из вычисления

$$\mathit{div} \int \frac{\mathfrak{w}}{r}\, d\tau\,.$$

Так как это вычисление довольно сложно, то мы применяем для проверки уравнения (5) другой более удобный способ.

Уравнение (6) дает нам дивергент

$$\mathit{div}\,\nabla^2 \mathfrak{u} = \mathit{div}\,\mathit{grad}\,\mathit{div}\,\mathfrak{u} = \nabla^2\,\mathit{div}\,\mathfrak{u} = -\,\mathit{div}\,4\pi\mathfrak{w}\,.$$

Тогда из уравнения (2) следует

$$div\, 4\pi \mathfrak{w} = 0,$$
$$\nabla^2 div\, \mathfrak{u} = 0.$$

Это является ни чем иным, как уравнением Лапласа для $div\, \mathfrak{u}$. Так как $\mathfrak{u}$, как и $\frac{1}{r}$, должно в бесконечности обращаться в нуль, а след., $div\, \mathfrak{u}$, и $\frac{1}{r^2}$, то согласно § 30 $div\, \mathfrak{u} = 0$, что и требовалось доказать.

Таким образом, вектор скоростей имеет вид:

$$(8)\quad \begin{cases} \mathfrak{a} = rot \int \frac{\mathfrak{w}}{r} d\tau = \\ = rot \int \frac{rot\, \mathfrak{a}}{4\pi r} d\tau, \end{cases}$$

здесь дифференцирование производится под знаком интеграла, рассматривая $\mathfrak{v}$ как переменное при чем расстояние r элемента $d\tau$ от точки, для которой определяется $\mathfrak{v}$ дается в координатах представляющих дифференциальные переменные интеграции.

§ 38. Вихрь на поверхности.

Поставим для векторного потенциала $\mathfrak{u}$ общее условие, что при прохождении определенных поверхностей первые производные величины $\mathfrak{u}$ в направлении нормали к этой поверхности могут быть прерывными, т. е., что

$$((\overline{\mathfrak{n}}\,\nabla)\,\mathfrak{u})_1 + ((\overline{\mathfrak{n}}\,\nabla)\,\mathfrak{u})_2 = 4\pi \mathfrak{x};$$

тогда решение уравнения (6) предыдущего параграфа, должно согласно § 30, гласить:

$$\mathfrak{u} = \int \frac{\mathfrak{w}}{r} d\tau - \int \frac{\mathfrak{x}}{r} df.$$

Для $\mathfrak{v}$ мы получаем следующее свойство. Мы образуем векторное произведение значения вектора $\mathfrak{v}$, принимаемое им в непосредственной близости к поверхности перерыва, на нормаль к поверхности перерыва в той же точке:

$$[\bar{\mathfrak{n}}, \mathfrak{v}] = [\bar{\mathfrak{n}}, rot\, \mathfrak{u}] = grad\, (\bar{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{u})_{\mathfrak{n}} - (\bar{\mathfrak{n}}\, \nabla)\, \mathfrak{u}.$$

Отсюда следует

$$4\pi \mathfrak{x} = (grad\, (\bar{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{u})_{\mathfrak{n}})_1 + (grad\, (\bar{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{u})_{\mathfrak{n}})_2 - [\bar{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{v}]_1 - [\bar{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{v}]_2.$$

Так как

$$grad\, (\bar{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{u})_{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}\, div\, \mathfrak{u}.$$

а $div\, \mathfrak{u}$ по обоим сторонам поверхности перерыва равен нулю, то

$$(grad\, (\bar{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{u})_{\mathfrak{n}})_1 + (grad\, (\bar{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{u})_{\mathfrak{n}})_2 = 0.$$

Таким образом остается

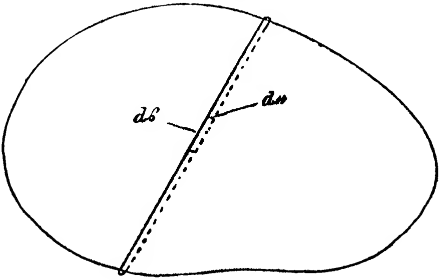
$$[\bar{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{v}]_1 + [\bar{\mathfrak{n}}\, \mathfrak{v}]_2 = -4\pi \mathfrak{x}.$$

Компонент $\mathfrak{v}$ по касательной при прохождении поверхности прерывается. Компонент по нормали остается непрерывным. То же получается из условий, что $div\, \mathfrak{v}$ должен равняться нулю во всем пространстве; потому что принятие условия прерывности компонента по нормали к поверхности означает, согласно § 33, что поверхность обладает плотностью.

Для дальнейшего исследования непрерывности выделим поверхность перерыва по возможности близко примыкающей к ее обоим сторонам замкнутой поверхности и возьмем вдоль замкнутой кривой на этой же поверхности интеграл

$$\int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{s}.$$

Интеграция должна происходить по обоим сторонам поверхности перерыва так, чтобы каждому элементу линии одной стороны соответствовал противоположно направленный элемент на другой. Интеграл дает нам силу вихря через поверхность замкнутого пути интеграции, которая состоит из полосок, тем более узких, чем теснее прилегает замкнутая поверхность к поверхности перерыва. Интеграл может быть разложен на сумму интегралов, причем интегрирование производится по ряду замкнутых путей (черт. 13). Так как компонент $\mathfrak{v}$ по нормали при



Черт. 13.

переходе через поверхность остается непрерывным, то мы можем избрать путь интеграции нормально к поверхности в любом месте, хотя бы даже отрезки пути проходило бы в противоположном направлении. Соответственно этому мы разлагаем замкнутую полоску, дающую путь интеграции, на произвольно большое число соприкасающихся между собой узких полосок, положение и сумма площадей которых должна соответствовать первоначальным. Мы берем одну из таких элементарных полосок a с длиной $d\mathfrak{s}$ и с очень малой относительно $d\mathfrak{s}$ шириной $d\mathfrak{n}$. Тогда интеграл окружности этой полоски перейдет в

$$(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)\, d\mathfrak{s} = rot\, \mathfrak{v}\, [d\mathfrak{s} \cdot d\mathfrak{n}],$$

или отнесенный к единице длины $d\mathfrak{s}$ в

$$(\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}_2)\, \overline{d\mathfrak{s}} = rot\, \mathfrak{v}\, [\overline{d\mathfrak{s}}\, d\mathfrak{n}].$$

В левой части мы имеем разность компонентов $\mathfrak{v}$ по касательной в направлении $\overline{d\mathfrak{s}}$ к обоим сторонам поверхности перерыва, которая должна, согласно выше принятым условиям, иметь конечное значение. Она равна компоненту вихря через бесконечно малую площадь $[\overline{d\mathfrak{s}}\ \overline{d\mathfrak{n}}]$ в направлении нормали к этой площади. Таким образом, через поверхность перерыва проходит вихрь бесконечно большой силы, причем произведение поперечного сечения поверхности на силу вихря имеет конечную величину. Такие вихри называются вихрями **на поверхности**.

Глава 3.

Некоторые отделы из теории электричества.

§ 39. Вычисление любого векторного поля.

В § 32 по данному источнику было определено векторное поле без вихрей, в § 37 по данному вихрю была определена область без источника. Так как мы можем, согласно § 28, разложить любое векторное поле на поле, свободное от вихрей, и на поле без источника, то вычисление произвольного векторного поля по заданному источнику и вихрю, удовлетворяющему выше данным условиям, не представляет затруднений, и мы можем тотчас же дать решение, т. е. дать значение вектора в любой точке. Вектор состоит из суммы градиента скалярного потенциала V и вращения векторного потенциала $\mathfrak{u}$:

(1) $$\mathfrak{W} = grad\, V + rot\, \mathfrak{u};$$

выражения для V и $\mathfrak{u}$ даны в §§ 32 и 37. Для первой части мы ввели — не рассматривая прерывности вектора и его производных — обозначение *Newp*. Для второй части применяют подобное же обозначение. Вектор $\mathfrak{u}$

является потенциалом векторного распределения $\mathfrak{w}$; аналогично способу обозначений

(2) $$V = Pot\, \rho,$$

полагаем

(3) $$\mathfrak{u} = Pot\, \mathfrak{w};$$

уравнение (1) принимает таким образом вид

(4) $$\mathfrak{W} = \nabla Pot\, \rho + [\nabla Pot\, \mathfrak{w}].$$

Вместо этого можно также написать

$$New\, \rho + Lap\, \mathfrak{w}.$$

Второе сокращение введено в память Лапласа. Наряду с векторным соединением оператора Гамильтона векторного потенциала, существует еще вторая имеющая значение связь скалярная; для нее также введено особое обозначение в честь Максвелля.

$$\nabla Pot\, \mathfrak{w} = Max\, \mathfrak{w}.$$

§ 40 Электромагнитные уравнения Максвелля Лоренца

В математической физике со времен Максвелля наиболее существенное применение имеет векторное исчисление в представлениях электрических и магнитных явлений. В теории Максвелля при описании этих явлений применяются следующие векторы:

$\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ — электрическая и магнитная сила поля, которая по величине и направлению определяет в соответствующей точке силу электрического, или магнитного поля, действующего на количество электричества e, или магнитный плюс m, после приведения силы посредством деления на e или на m, к заряду равному единице (e или m рассматриваются, как бесконечно малые). Заряд, равный единице определяется тем, что величина силы отталкивания двух тел с зарядами e и e', находящихся на расстоянии r друг от друга равна

$$\frac{e\,e'}{4\pi r^2}, \text{ или } \frac{m\,m'}{4\pi r^2}.$$

Вектор $\mathfrak{D}$ — электрическое возбуждение, или диэлектрическое смещение. Этот вектор берется так, что векторный поток через элемент поверхности $d\mathfrak{o}$, т. е. $\mathfrak{D}\,d\mathfrak{o}$, равен количеству электричества, протекающему через элемент за тот промежуток времени, в течение которого данная масса не подвергалась никаким электрическим, или магнитным, влияниям. Таким образом, в электростатике

$$\int \mathfrak{D}\,d\mathfrak{o} = \Sigma e$$

является выражением соотношения между общим электрическим возбуждением через замкнутую поверхность и совокупностью заключенных в поверхности электрических зарядов.

Для изотропных тел с диэлектрической постоянной ε $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ связаны соотношением

$$\mathfrak{D} = \varepsilon\,\mathfrak{E}.$$

Изменение $\mathfrak{D}$ по времени, в определенной точке пространства, обусловливает электрический ток, который Максвелль называет током сдвига. Внутри проводника, помимо этого тока сдвига, существует еще конвекционный ток электрически заряженных частиц, скорость которых дается вектором $\mathfrak{v}$; представление этого тока совпадает со старыми теориями электрического тока. Отсюда полное выражение для электрического тока таково

$$\mathfrak{S} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \rho\,\mathfrak{v}.$$

Этот вектор теория принимает как соленоидально распределенный, следовательно, он всегда может выражаться посредством вращения другого вектора.

Вектор $\mathfrak{B}$ — магнитная индукция или магнитное возбуждение. Этот вектор нам представится ясно, если мы вспомним о результатах даваемых законом Фарадея об индукции. В замкнутом проводнике индуцируется электрический ток, если возбудить или изменить, магнитное поле. Количество электричества, проходящее через поперечное сечение проводника при возбуждении магнитного поля пропорционально огибаемой проводником площади, обратно пропорционально электрическому сопротивлению проводника и пропорционально магнитному возбуждению через поверхность зависящую от среды, в которой происходит возбуждение. В простейшем случае — свободный эфир — возбуждение равно данной силе поля; в изотропной среде полагают $\mathfrak{B}$ пропорциональным $\mathfrak{H}$, множителем пропорциональности является магнитная проницаемость среды μ; таким образом,

$$\mathfrak{B} = \mu \, \mathfrak{H}.$$

Эти векторы $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{B}$ находятся в зависимости друг от друга и связаны между собой следующими уравнениями:

$$(1) \qquad rot\, \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\, \mathfrak{S} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \rho\, \mathfrak{v}\right),$$

$$(2) \qquad rot\, \mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\, \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t},$$

где величина c обозначает скорость света. Помимо этого мы имеем равенства:

$$div\, \mathfrak{B} = 0,$$

$$div\, \mathfrak{D} = \rho;$$

где ρ обозначает электрическую плоскость в данном месте. На основании общего значения уравнения (1) следует

$$div\,\mathfrak{S} = \frac{\partial}{\partial t}\rho + div\,(\rho\,\mathfrak{v}) = 0\,,$$

что говорит, что заряд каждого элемента массы должен оставаться без изменения во время движения. (Уравнение неразрывности в электричестве).

§ 41. Мировые векторы и тензоры. Преобразование Лоренца.

Уравнения предыдущего параграфа действительны для электрических явлений, происходящих в среде, не находящейся в движении, т. е. они служат для описания явлений, по отношению к системе координат, неподвижно связанной со средой, в которой происходят эти явления. Однако, применяющийся в теоретической механике принцип относительности требует, чтобы уравнения движения не зависели от абсолютной скорости системы сравнения; в действительности, уравнения движения остаются без изменения, если на место системы координат x, y, z вводится новая система, находящаяся в движении относительно прежней:

$$(1) \qquad x' = x - ut\,;\; y' = y - vt\,;\; z' = z - wt\,,$$

где u, v, w являются компонентами скорости одной системы относительно другой. Соответственно сказанному, электрические явления должны описываться таким же образом — совершенно безразлично, отнесены ли тела к неподвижно связанной с комнатой, в которой производятся наблюдения, системе координат, или к системе, находящейся в движении по отношению к этой комнате, т. е., безразлично, воспринимаем ли мы это преобразование, или нет. Согласно сказанному, Герц распространил уравнения Максвелля для неподвижного тела на явления, происходящие в теле, находящемся в движении и получил ряд следствий, которые, однако, не все удалось доказать. Отсюда можно было заключить, что если мы хотим придерживаться уравнений Максвелля, то нельзя применять принцип относительности чистой механики.

Наблюдения над скоростью света, рассматриваемого, как электромагнитное явление, показало, что скорость света не зависит от направления движения земли в пространстве (опыт Михельсона) и привело к требованию, что при переходе от одной системы сравнения к другой, находящейся в относительном движении, расстояние $\mathfrak{r}$ ($\mathfrak{r}'$) между двумя точками твердого тела должно рассматриваться, не как неизменное, согласно преобразованию (1)

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2=r'^2_1+r'^2_2+r'^2_3,$$

а как

$$r_1^2+r_2^2+r_3^2-c^2t^2=r'^2_1+r'^2_2+r'^2_3-c^2t'^2,$$

где c обозначает скорость света. Инвариантность этого выражения при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой, также прямоугольной, которая движется относительно первой в направлении оси x со скоростью v, обусловливает следующие уравнения преобразования:

$$(2)\qquad x'=\frac{c(x-vt)}{\sqrt{c^2-v^2}};\quad y'=y;\quad z'=z,\quad t'=\frac{c\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{c^2-v^2}},$$

которые переходят в более простые:

$$x'=(x-vt);\quad y'=y;\quad z'=z;\quad t'=t,$$

когда v достаточно мало по сравнению с c. Это преобразование (2) называется **преобразованием Лоренца.** Надлежащее исследование показывает, что в этом случае удовлетворяется следующий общий принцип относительности.

Все явления в пространстве подчинены такого рода закону, что наблюдения, производимые над материальной системой точек, движущейся прямолинейно с постоянной скоростью вместе с наблюдателем, математически совпадают с наблюдениями, которые можно произвести над той же системой, если бы она, а вместе с нею и наблюдатель находились в покое. В силу этого нельзя установить никакими измерениями, как бы точны они ни были, абсолютную величину скорости, с которой движется какое-либо тело в мировом пространстве. То, что дается наблюдением абсолютно, это изменения, как скорости, так и направления. Минковский рассматривал это преобразавание по пространству и времени, как преобразование четырехмерной прямоугольной пространственной системы координат в другую, в которой длина отрезка прямой[1])

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + l^2}, \text{ при } l^2 = -c^2 t^2$$

должна оставаться постоянной. Уравнения преобразования

$$(3)\qquad \begin{cases} r'_1 = \alpha_1^{(1)} r_1 + \alpha_1^{(2)} r_2 + \alpha_1^{(3)} r_3 + \alpha_1^{(4)} l, \\ r'_2 = \alpha_2^{(1)} r_1 + \alpha_2^{(2)} r_2 + \alpha_2^{(3)} r_3 + \alpha_2^{(4)} l, \\ r'_3 = \alpha_3^{(1)} r_1 + \alpha_3^{(2)} r_2 + \alpha_3^{(3)} r_3 + \alpha_3^{(4)} l, \\ l'_3 = \alpha_4^{(1)} r_1 + \alpha_4^{(2)} r_2 + \alpha_4^{(3)} r_3 + \alpha_4^{(4)} l, \end{cases}$$

с условиями ортогональности:

$$(4)\qquad \begin{cases} \sum_n \alpha_n^{(m)^2} = 1 & m = 1, 2, 3, 4 \\ \sum_n \alpha_n^{(m)} \alpha_n^{(o)} = 0 & m, o = 1, 2, 3, 4 \end{cases} \qquad m \gtrless o$$

и с условиями, определяемыми значением l, или l' гласят: коэффициенты, имеющие индекс 4, должны быть мнимыми, все остальные — действительными, детерминант и $\alpha_4^{(4)}$ должны быть положительны.

Это преобразование равносильно преобразованию Лоренца.

При исследовании величин и соотношений, которые остаются инвариантными относительно преобразований Лоренца, или уравнений (3) с их добавочными условиями, оказалось целесообразным ввести векторы для этого четырехмерного пространства. Величина, соответствующая полярному вектору трехмерного пространства, была названа четвертым вектором. Он является совокупностью четырех

---

[1]) Обозначение „l“, как четвертой координаты, введено Зоммерфельдом в силу ее особого значения; оно должно напоминать путь луча (Lichtweg) света.

компонентов P_x, P_y, P_z, P_l по направлениям осей четырехмерной системы координат, причем длина его не зависит от выбора системы координат, поскольку последняя может быть приведена преобразованием Лоренца к первоначальной

$$|P| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 + P_l^2}.$$

Осевой вектор, определяемый в трехмерном пространстве по каждым двум координатным осям компонентами, соответствует так называемому шестому вектору, образуемому шестью компонентами, отнесенными к шести комбинациям каждых двух осей.

Вычисление четвертого и шестого векторов и их линейных векторных функций было дано Зоммерфельдом: *„Annal. d. Phys."* 32, 1910, стр. 749—776 и 33, 1910, стр. 649—689. (*„Zur Relativitätstheorie' Vierdimensionale Vektoralgebra und Vektoranalysis".*)

§ 42. Закон Био-Савари.

Если мы имеем дело со стационарным током в весомом проводнике, то полный ток $\mathfrak{S}$ переходит в конвенкциональный $\rho\,\mathfrak{v}$. Магнитное действие последнего дается выражениями:

$$rot\,\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\,\mathfrak{S} = \frac{1}{c}\,\rho\,\mathfrak{v},$$

$$div\,\mathfrak{H} = 0.$$

Отсюда согласно уравнению (4) § 46, следует:

$$4\pi\,\mathfrak{H} = Lap\,\frac{1}{c}\,\mathfrak{S}, \tag{1}$$

или, если мы обозначим перпендикулярное к направлению тока поперечное сечение проводника, принимаемого в дальнейшем за бесконечно тонкое, через q, а силу тока — через

$$i = q\,\frac{\mathfrak{S}}{c},$$

то получаем

$$4\pi\mathfrak{H} = Lap\frac{l}{q}\overline{\mathfrak{S}},$$

что дает нам закон Био-Савари относительно возбуждения магнитного поля посредством электрического тока. Для того, чтобы показать полное совпадение с обычным видом, мы исходим из обозначения Lap:

$$Lap\,\mathfrak{w} = [\nabla\, Pot\,\mathfrak{w}],$$

где дифференцирование относится к параметру при $\mathfrak{r}$, находящемуся под знаком потенциала. Он определяет положение точки, для которой берется потенциал, а в особом случае уравнения (1) — положение места для которого должно быть дано $\mathfrak{H}$. Дифференцирование по этому параметру мы можем выполнить также под знаком интеграла, и, следовательно,

$$(2) \qquad Lap\,\mathfrak{w} = \iiint\left[\nabla\frac{\mathfrak{w}}{r}\right]d\tau.$$

Величина $\mathfrak{w}$ не зависит от параметра, поэтому мы можем функцию с трехкратным интегралом, написать, согласно уравнению (2) § 27, в виде

$$\left[\nabla\frac{\mathfrak{w}}{r}\right] = -\left[\mathfrak{w}\, grad\frac{1}{r}\right] = -\left[\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{w}}{r^3}\right].$$

Поэтому

$$(3) \qquad 4\pi\mathfrak{H} = -\int\left[\frac{\mathfrak{r}\, i\,\overline{\mathfrak{S}}}{q\, r^3}d\tau\right],$$

или, если положить $d\tau = \mathfrak{q}\cdot d\mathfrak{s}$ и принять во внимание, что $\overline{\mathfrak{S}}$ и $d\mathfrak{s}$ имеют одно и то же перпендикулярное к поверхности $\mathfrak{q}$ направление, так что

$$\overline{\mathfrak{S}}(\mathfrak{q}\cdot d\mathfrak{s}) = d\mathfrak{s}(\mathfrak{q}\cdot\overline{\mathfrak{S}}) = d\mathfrak{s}\cdot q,$$

то

$$(3') \qquad 4\pi\mathfrak{H} = -\int\left[\frac{\mathfrak{r}\, i}{r^3}d\mathfrak{s}\right].$$

Таким образом, мы можем вектор $\mathfrak{H}$ рассматривать, как сумму элементов $(d\mathfrak{s}, \mathfrak{r})\,\frac{i}{r^3}$. Каждый элемент тока $i\,d\mathfrak{s}$ вызывает на расстоянии r магнитное поле, пропорциональное синусу угла между элементом тока и линией соединения, обратно пропорционально квадрату расстояния и перпендикулярное к плоскости, проходящей через линию соединения и элемент тока. Векторы $d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}$, $[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}]\,\frac{i}{r^3} = 4\,\pi\,d\,\mathfrak{H}$ следуют в порядке, требуемом правилом Ампера.

Точно таким же образом, как мы преобразовали $Lap\,\mathfrak{w}$ дифференцированием под знаком интеграла, можно преобразовать $Max\,\mathfrak{w}$ и $Nev\,\rho$:

$$(4)\qquad \mathfrak{a} = \nabla\,Pot\,V = New\,\rho = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\mathfrak{r}\cdot V}{r^3}\,d\,\tau,$$

из этой суммы непосредственно видно что $\mathfrak{a}$ может быть рассматриваемо, как геометрическая сумма сил, приложенных к различным элементам об'ема и действующих в точке, для которой вычисляется $\mathfrak{a}$. Величина и направление этих сил определяются из закона Ньютона.

Часть III

Линейные векторные функции. Диады и тензоры.

§ 43. Линейные векторные функции.

Если компоненты некоторого вектора $\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{i} + a_2\mathfrak{j} + a_3\mathfrak{k}$ являются однородными **линейными функциями** компонентов другого $\mathfrak{b} = b_1\mathfrak{i} + b_2\mathfrak{j} + b_3\mathfrak{k}$, — то $\mathfrak{a}$ является линейной векторной функцией $\mathfrak{b}$. В таком случае существуют три скалярных уравнения:

$$
(1) \qquad \begin{cases} a_1 = b_1\lambda_1 + b_2\mu_1 + b_3\nu_1, \\ a_2 = b_1\lambda_2 + b_2\mu_2 + b_3\nu_2, \\ a_3 = b_1\lambda_3 + b_2\mu_3 + b_3\nu_3, \end{cases}
$$

где λ, μ, ν являются в общем девятью независимыми друг от друга постоянными коэффициентами. Подобная линейная векторная функция уже встречалась нам в полном дифференциале вектора по определенному направлению в § 19.

Если между девятью коэффициентами существуют соотношения:

$$
(2) \qquad \mu_1 = \lambda_2, \qquad \nu_1 = \lambda_3, \qquad \nu_2 = \mu_3,
$$

сводящие девять коэффициентов к шести, то векторную функцию называют **симметричной**. Подобную функцию мы рассматривали при исследовании момента количества движения $\mathfrak{U}$, как функцию угловой скорости $\mathfrak{u}$ в уравнении (2) § 26.

Если девять коэффициентов связаны между собой уравнениями:

(3) $\lambda_1 = \mu_2 = \nu_3 = 0, \quad \mu_1 = -\lambda_2, \quad \nu_1 = -\lambda_3, \quad \nu_2 = -\mu_3,$

то мы говорим об антимметричной линейной векторной функции.

В дальнейшем мы рассмотрим более подробно некоторые простейшие положения из теории линейных векторных функций в применении к векторному исчислению, так как они — особенно, симметричные — играют большую роль в физике. Эти функции имеют особенное значене в механике твердого тела и деформируемой среды и в теории электричества.

Для них мы берем следующее определение:

непрерывная функция вектора есть линейная векторная функция, если функция, представляющая собой сумму двух векторов, равна сумме функций этих векторов.

В действительности, между двумя компонентами одной и компонентами другой должны существовать соотношения вида (1).

Для сокращения мы будем обозначать линейную векторную функцию какого-либо вектора, ставя перед знаком вектора большую греческую букву. Система уравнений (1) напишется при этом так:

(4) $$\mathfrak{a} = \Phi \cdot \mathfrak{b},$$

где Φ определяется коэффициентами λ, μ, ν. Мы можем написать:

(5) $$\Phi = \begin{matrix} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1, \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2, \\ \lambda_3, & \mu_3, & \nu_3. \end{matrix}$$

Таким образом линейная векторная функция определяется уравнением:

$$\Phi \cdot \mathfrak{b} + \Phi \cdot \mathfrak{c} = \Phi (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}). \tag{6}$$

Символ Φ называется аффинором, и выражение (4) гласит: произведение аффинора на вектор дает снова вектор; или — аффинор Φ переводит вектор $\mathfrak{b}$ в вектор $\mathfrak{a}$.

Обозначение „аффинор" должно напоминать, что уравнение (4), или система уравнений (1), могут быть рассматриваемы, как изображение сродственного (аффинорного) преобразования в пространстве — если a_1, a_2, a_3 являются координатами конечной точки вектора $\mathfrak{a}$ в одной системе и b_1, b_2, b_3 координатами той же точки в другой системе.

Величины λ, μ, ν мы можем рассматривать, как компоненты трех векторов по трем направлениям $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Эти три вектора вида

$$\mathfrak{K}_1 = \lambda_1 \mathfrak{i} + \mu_1 \mathfrak{j} + \nu_1 \mathfrak{k}$$

называются координатными векторами аффинора Φ.

Символы линейных векторных функций мы снабжаем индексом c, если эти символы получаются из символов без индексов замены горизонтальных строчек вертикальными и обратно. Их называют сопряженными первоначальным. Сопряженный аффинору Φ [уравнение (5) будет аффинор

$$\Phi_c = \begin{matrix} \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, \\ \mu_1, & \mu_2, & \mu_3, \\ \nu_1, & \nu_2, & \nu_3. \end{matrix} \tag{7}$$

Если $\Phi = \Phi_c$, то Φ является символом симетричной линейной векторной функции; этот символ называется тензором. Если $\Phi = -\Phi_c$, то Φ является символом антисимметричной векторной функции.

Название тензор напоминает учение теории упругости о том, что напряжения в упругом теле связаны в первом приближении с направлениями нормалей к элементам поверхности, к которым отнесены напряжения, посредством симметричной линейной векторной функции. Совокупность трех уравнений (1) называется тройным тензором, а коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ его **компонентами**.

Этот символ может быть приведен к некоторому скалару, на который умножается вектор $\mathfrak{b}$, когда все коэффициенты равны между собой. Таким образом, можно рассматривать действие выполняемое под символом Φ как общий случай перемножения вектора и скалярной величины.

Из данного определения непосредственно следует, что сумма двух векторных функций является также векторной функцией, не зависящей от порядка следования слагаемых:

$$\Phi + \Psi = X = \Psi + \Phi.$$

Коэфициенты результирующей функции равны сумме соответствующих коэффициентов отдельных функций. Отсюда следует, что любая линейная векторная функция может быть рассматриваема, как сумма одной симметричной и одной антисимметричной функции:

$$\Phi = {}^1/_2(\Phi + \Phi_c) + {}^1/_2(\Phi - \Phi_c). \tag{8}$$

Симметричную часть ${}^1/_2\,(\Phi - \Phi_c)$ рассматривают так же, как **тензор аффинора** Φ, или как симметричную диаду первого рода и пишут сокращенно $ts\,\Phi$ или $[\Phi]$; антимметричную часть ${}^1/_2\,(\Phi - \Phi_c)$ называют **аксиатором аффинора** и пишут $ax\,\Phi$. Таким образом:

$$\Phi = ts\,\Phi + ax\,\Phi.$$

Если мы будем снова рассматривать уравнение (1), как уравнение преобразования прямоугольной системы координат b_1, b_2, b_3, в прямолинейные координаты a_1, a_2, a_3, то уравнение (8) выражает, что преобразование (1) может быть разложено на два отдельных преобразования: во-первых, на то, которое соответствует символу ${}^1/_2\,(\Phi + \Phi_c)$, определяющему одно только поступательное изменение без изменения направления осей координат, и во-вторых, на символ ($^1/_2$ ($\Phi - \Phi_c$)) соответствующий вращению осей координат. Более подробно об этом разделении будет сказано в §§ 50 и 51.

§ 44. Диады.

В уравнении (1) предыдущего параграфа в приведенном примере компоненты a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 являются компонентами векторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ по направлениям трех взаимно перпендикулярных осей $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Первоначально мы будем придерживаться принятого и произведем в этих уравнениях некоторые преобразования. Перемножая три уравнения на $\mathfrak{i}$ и соответственно на $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ и складывая, получаем:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad \mathfrak{a} = b_1 \{ \lambda_1 \mathfrak{i} + \lambda_2 \mathfrak{j} + \lambda_3 \mathfrak{k} \}, \\
+ b_2 \{ \mu_1 \mathfrak{i} + \mu_2 \mathfrak{j} + \mu_3 \mathfrak{k} \}, \\
+ b_3 \{ \nu_1 \mathfrak{i} + \nu_2 \mathfrak{j} + \nu_3 \mathfrak{k} \}.
\end{aligned}
$$

Три выражения в скобках являются тремя векторами, которые мы образуем через $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, таким образом,

$$(2) \qquad \mathfrak{a} = b_1 \mathfrak{l} + b_2 \mathfrak{m} + b_3 \mathfrak{n},$$

или

$$(3) \qquad \mathfrak{a} = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{i})\,\mathfrak{l} + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{j})\,\mathfrak{m} + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{k})\,\mathfrak{n}.$$

Векторы $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ представляют собой по величине и направлению частное от деления вектора $\mathfrak{a}$ на абсолютную величину вектора $\mathfrak{b}$ в случае, когда направление $\mathfrak{b}$ совпадает с направлением $\mathfrak{i}$, или $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Так как тогда, например,

$$b_2 = b_3 = 0; \ b_1 = |\mathfrak{b}| = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{i})$$

и таким образом,

$$\mathfrak{a} = |\mathfrak{b}| \cdot \mathfrak{l},$$

Джиббс и Вильсон пишут, взамен вида (1), (2) или (3):

(4) $$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot (\mathfrak{i};\ \mathfrak{l} + \mathfrak{j};\ \mathfrak{m} + \mathfrak{k};\ \mathfrak{n})$$

или

$$= (\mathfrak{l};\ \mathfrak{i} + \mathfrak{m};\ \mathfrak{j} + \mathfrak{n};\ \mathfrak{k}) \cdot \mathfrak{b},$$

где знак „;" между двумя векторами ставится для того, чтобы избежать возможной ошибки принятия этого выражения за скаларное произведение векторов. Точки перед и после $\mathfrak{b}$ должны обозначать, что вектор $\mathfrak{b}$ является одним из сомножителей скаларнаго произведения. Действие стоящее под знаком $(\mathfrak{l}\,;\,\mathfrak{i})$, называется **простой диадой**.

Сравнение уравнения (4) настоящего параграфа с уравнением (4) предыдущего указывает, что символ Φ, названный нами аффинором, является суммой трех простых диад. Эта сумма, т. е.

(5) $$\mathfrak{l}\,;\,\mathfrak{i} + \mathfrak{m}\,;\,\mathfrak{j} + \mathfrak{n}\,;\,\mathfrak{k}$$

или в общем виде

6) $$\mathfrak{c}\,;\mathfrak{f} + \mathfrak{d}\,;\mathfrak{g} + \mathfrak{e}\,;\mathfrak{h},$$

где векторы $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ могут быть и не взаимно перпендикулярны, называется **полной диадой**, если ни $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, ни $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ не являются тремя компланарными векторами. Полной ее называют потому что, как мы увидим далее, сумма произвольного числа простых диад может быть приведена к этому виду. $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ называются **антецедентами**, а $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{h}$ **консеквентами** диады.

Точно так же кажущееся наиболее общим выражение (6) полной диады, в котором $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ вообще не взаимно перпендикулярны определяет линейную векторную функцию вектора $\mathfrak{a}$ в функции вектора $\mathfrak{b}$ подобно выражению (1) предыдущего параграфа, за исключением случая, когда a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 являются компонентами векторов по трем произвольно выбранным не компланарным направлениям

$\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$. Требование, чтобы, как первоначальные (антецеденты), так и производные (консеквенты), были не компланарными векторами, является по отношению к линейным векторным функциям равнозначным тому, что система 3-х уравнений, вполне и однозначно определяет, как вектор $\mathfrak{a}$ из $\mathfrak{b}$, так и вектор $\mathfrak{b}$ из $\mathfrak{a}$. Таким образом, например:

$$(7) \qquad \begin{aligned} \Psi &= \mathfrak{c}\,;\, \mathfrak{f} + \mathfrak{d}\,;\, \mathfrak{g} + \mathfrak{e}\,;\, \mathfrak{h}, \\ &= c_1\, \mathfrak{f}\, \mathfrak{f} + c_2\, \mathfrak{g}\, \mathfrak{f} + c_3\, \mathfrak{h}\, \mathfrak{f}, \\ &+ d_1\, \mathfrak{f}\, \mathfrak{g} + d_2\, \mathfrak{g}\, \mathfrak{g} + d_3\, \mathfrak{h}\, \mathfrak{g}, \\ &+ e_1\, \mathfrak{f}\, \mathfrak{h} + e_2\, \mathfrak{g}\, \mathfrak{h} + e_3\, \mathfrak{h}\, \mathfrak{h}, \end{aligned}$$

и сама линейная векторная функция:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{a} = \Psi \cdot \mathfrak{b} &= b_1 \left\{ c_1 \mathfrak{f} + c_2 \mathfrak{g} + c_3 \mathfrak{h} \right\}, \\ &+ b_2 \left\{ d_1 \mathfrak{f} + d_2 \mathfrak{g} + d_3 \mathfrak{h} \right\}, \\ &+ b_3 \left\{ e_1 \mathfrak{f} + e_2 \mathfrak{g} + e_3 \mathfrak{h} \right\}. \end{aligned}$$

Символические выражения (5) и (6) показывают, что полная диада определяет две векторные функции в зависимости от того, рассматриваются ли векторы $\mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}$, или $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ вместе с независимым вектором, как переменные; эти функции, что не трудно показать, являются сопряженными друг другу. Следовательно:

$$(9) \qquad \mathfrak{b}\, \Phi_c = \Phi\, \mathfrak{b}.$$

§ 45 Применения.

Из уравнения (9) предыдущего параграфа для случая, когда Φ является тензором, т. е. Φ_c, выводится теорема, имеющая большое значение для тензорного исчисления.

Пусть $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}'$ и $\mathfrak{a}'', \mathfrak{b}''$ две пары величин, входящих совместно в значения векторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и удовлетворяющих уравнению

$$\mathfrak{a} = \Phi \cdot \mathfrak{b}.$$

Тогда мы можем в векторном произведении $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}''$ произвести следующие преобразования:

$$\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'' = \Phi\mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}'\Phi_c \cdot \mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}'\Phi \cdot \mathfrak{b}'' = \mathfrak{b}' \cdot \mathfrak{a}''.$$

Таким образом, если, например, вектор $\mathfrak{a}$ определяет состояние напряжения в бесконечно малой части какого-либо тела по направлениям, заданным вектором $\mathfrak{b}$, то наше уравнение говорит: каждое из двух напряжений $\mathfrak{a}'$ и $\mathfrak{a}''$ дает при проектировании по направлениям соответствующим другим напряжениям, одинаковую проекцию. Если направления $\mathfrak{b}'$ и $\mathfrak{b}''$ взаимно перпендикулярны, то уравнение выражает, что соответственные напряжения сдвига равны друг другу, — выражение, согласное с $\Phi = \Phi_c$.

§ 46 Некоторые правила для исчисления с с помощью диад.

Диада $\Psi' = \mathfrak{c}'; \mathfrak{f}$ примененная к вектору $\mathfrak{r}$, или, как мы говорим—перемножение диады с вектором $\mathfrak{r}$ дает векторную функцию:

$$(1) \qquad \mathfrak{R} = (\mathfrak{c}'; \mathfrak{f})\,\mathfrak{r} = (c'_1\,\mathfrak{f} + c'_2\,\mathfrak{g} + c'_3\,\mathfrak{h})\,(\mathfrak{f}\,\mathfrak{r}).$$

Две диады можно сложить если их предшествующие, или последующие, совпадают друг с другом; таким образом, если $\Psi' = \mathfrak{c}'; \mathfrak{f}$ и $\Psi'' = \mathfrak{c}''; \mathfrak{f}$, то

$$(2) \qquad \Psi'\mathfrak{r} + \Psi''\mathfrak{r} = (\Psi' + \Psi'')\,\mathfrak{r} = ((\mathfrak{c}' + \mathfrak{c}''); \mathfrak{f})\,\mathfrak{r}.$$

При помощи этой формулы нетрудно показать, что сумма произвольного числа диад может быть всегда приведена к сумме трех диад, так как мы всегда можем любой вектор привести к сумме трех некомпланарных векторов данного направления. Так например,

$$(3) \qquad \Psi = \mathfrak{c}; \mathfrak{f} + \mathfrak{d}; \mathfrak{g} + \mathfrak{e}; \mathfrak{h} + \mathfrak{o}; \mathfrak{p}.$$

Пишем

$$\mathfrak{p} = p_1\,\mathfrak{f} + p_2\,\mathfrak{g} + p_3\,\mathfrak{h}$$

и получаем

(4) $\qquad \Psi = (\mathfrak{c} + \mathfrak{o}\, p_1)\,;\,\mathfrak{f} + (\mathfrak{d} + \mathfrak{o}\, p_2)\,;\,\mathfrak{g} + (\mathfrak{e} + \mathfrak{o}\, p_3)\,;\,\mathfrak{h}\,.$

Отсюда следует, что выражение (6) предыдущего параграфа представляет собой общий вид диады.

В общем виде мы можем писать полную диаду, выражающую сумму диад

(5) $$X = \sum_i \mathfrak{s}_i\,;\,t_i$$

коль скоро выбраны направления трех антецедентов, или трех консеквентов. Если например,—как в уравнении (1)— $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ являются тремя консеквентами, то, согласно § 14, вектор $\mathfrak{s}_i$ может быть выражен следующим образом:

$$\mathfrak{s}_i = \mathfrak{f}\,\frac{\mathfrak{s}_i\,[\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}]}{\mathfrak{f}\,[\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}]} + \mathfrak{g}\,\frac{\mathfrak{s}_i\,[\mathfrak{h}\,\mathfrak{f}]}{\mathfrak{g}\,[\mathfrak{h}\,\mathfrak{f}]} + \mathfrak{h}\,\frac{\mathfrak{s}_i\,[\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}]}{\mathfrak{h}\,[\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}]},$$

и для трех антецедентов мы имеем выражение

(6) $$\begin{cases} \mathfrak{f}' = \sum_i \dfrac{\mathfrak{s}_i\,[\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}]}{\mathfrak{f}\,[\mathfrak{g}\,\mathfrak{h}]}\, t_i, \\ \mathfrak{g}' = \sum_i \dfrac{\mathfrak{s}_i\,[\mathfrak{h}\,\mathfrak{f}]}{\mathfrak{g}\,[\mathfrak{h}\,\mathfrak{f}]}\, t_i, \\ \mathfrak{h}' = \sum_i \dfrac{\mathfrak{s}_i\,[\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}]}{\mathfrak{h}\,[\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}]}\, t_i. \end{cases}$$

Полная диада может быть написана $X = (\mathfrak{f}'\,;\mathfrak{f} + \mathfrak{g}'\,;\,\mathfrak{g} + \mathfrak{h}'\,;\,\mathfrak{h})$. Отсюда видно, что выражение (5) предыдущего параграфа столь же обще, как и выражение (6).

Сомножители — диады и вектор, в какой-либо векторной функции не могут быть переставлены один на место другого, символ же $\mathfrak{b}\,\Phi$ обозначает, что антецедентот перемножается с вектором $\mathfrak{b}$ скалярно.

Далее, необходимо заменить формулу:

$$(\mathfrak{c};\,\mathfrak{f})\,\mathfrak{r} = c\,(\bar{\mathfrak{c}}\,;\,\mathfrak{f})\cdot\mathfrak{r} = f\,(\mathfrak{c};\,\bar{\mathfrak{f}})\cdot\mathfrak{r} = c\cdot f\,(\bar{\mathfrak{c}};\,\bar{\mathfrak{f}})\,\dot{\mathfrak{r}},$$

где c и f являются абсолютными значениями векторов $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{f}$; кроме того,

$$\Psi \cdot \mathfrak{r} = r\Psi \frac{\mathfrak{r}}{r} = r\Psi \cdot \mathfrak{r},$$

где r — абсолютная величина $\mathfrak{r}$.

Наконец, необходимо показать значение многократного применения диад к вектору. Задача состоит в том, чтобы применить к вектору $\mathfrak{R} = \Psi_1 \mathfrak{r}$ диаду Ψ_2, т. е. образовать $\Psi_2 \Psi_1, \mathfrak{r}$. Пусть

$$\Psi_1 = \mathfrak{c}; \mathfrak{f} \text{ и } \Psi_2 = \mathfrak{s}; \mathfrak{t},$$

тогда

$$\Psi_2 \cdot \Psi_1 \cdot \mathfrak{r} = (\mathfrak{s}, \mathfrak{t}) \cdot (\mathfrak{c}; \mathfrak{f}) \cdot \mathfrak{r} = (\mathfrak{s}; \mathfrak{t}) \cdot (\mathfrak{c}) \cdot (\mathfrak{f}\,\mathfrak{r})).$$

Величина $(\mathfrak{f}\,\mathfrak{r})$ есть скалярная; таким образом, мы применяем Ψ_2 к $\mathfrak{c}$ и получаем

$$\Psi_2 \Psi_1 \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{s} \cdot (\mathfrak{t}\,\mathfrak{c})(\mathfrak{f}\,\mathfrak{r}) = (\mathfrak{s}\,(\mathfrak{t}\,\mathfrak{c}); \mathfrak{f})\,\mathfrak{r}.$$

Произведение двух одночленных диад есть также одночленная диада. Она состоит из антецедентов прежней диады, являющейся антецедентом новой и из консеквента задней являющейся консеквентом новой, перемноженных на скалярное произведение. Весьма важное значение имеет теорема, что если $\Phi\,\mathfrak{r}$ является произвольной векторной функцией, то при любых значениях $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$ векторное произведение

$$[(\Phi \mathfrak{r}_1)(\Phi\,\mathfrak{r}_2)]$$

является линейной функцией векторного произведения $[\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2]$. Это векторное произведение называется сопряженным аффинором пишется

(7) $$(\Phi\,\mathfrak{r}_1)(\Phi\,\mathfrak{r}_2)] = k\,o\,\Phi\,[\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2].$$

Если Φ удовлетворяет соотношению:

(8) $$[(\Phi\,\mathfrak{r}_1)(\Phi\,\mathfrak{r}_2] = \Phi\,[\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2] = k\,o\,\Phi\,[\mathfrak{r}_1\,\mathfrak{r}_2],$$

то Φ называют „вектором," так как производимая аффинором трансформация представляет собой простое вращение.

§ 47. Приведение полной диады к одному и двум членам.

При известных условиях полная диада может быть приведена к сумме двух диад, или даже к одной диаде.

Пусть дана полная диада

(1) $$\Phi = (\mathfrak{a}\,;\mathfrak{a}' + \mathfrak{b}\,;\mathfrak{b}' + \mathfrak{c};\mathfrak{c}')$$

антецеденты этой диады являются тремя произвольно данными не компланарными векторами, по которым, согласно уравнению (6) § 52, вычисляются $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$.

Умножая диаду на вектор $\mathfrak{r}$, получаем вектор

(2) $$\mathfrak{r}' = \Phi\cdot\mathfrak{r} = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{a}'\,\mathfrak{r}) + \mathfrak{b}\,(\mathfrak{b}'\,\mathfrak{r}) + \mathfrak{c}\,(\mathfrak{c}'\,\mathfrak{r}).$$

Условие приведения выражения (1) к двучлену равнозначуще условию аналогичного приведения выражения (2) при любом векторе $\mathfrak{r}$. Сказанное мы можем выполнить только тогда, когда одно из выражений в скобках может быть выражено посредством двух других, путем перемножения их на скаларные величины, т. е. если для всякого произвольного вектора $\mathfrak{r}$

$$A\,(\mathfrak{a}'\,\mathfrak{r}) + B\,(\mathfrak{b}'\,\mathfrak{r}) = (\mathfrak{c}'\,\mathfrak{r})\,.$$

Это уравнение возможно при условии, что

$$A\,\mathfrak{a}' + B\,\mathfrak{b}' = \mathfrak{c}',$$

т. е. если консеквенты являются компланарными векторами. Тогда выражение (1) переходит в

$$\Phi = ((\mathfrak{a} + A\,\mathfrak{c})\,;\mathfrak{a}' + (\mathfrak{b} + B\,\mathfrak{c})\,;\mathfrak{b}')\,.$$

Если же, наоборот, консеквенты даны, как три некомпланарные векторы, то правая часть выражения (2) приводится к сумме двух членов лишь в том случае, когда один трех антецедентов может быть представлен через два другие, т. е. когда антецеденты компланарны. Тогда можно написать

$$\Phi = (\mathfrak{a}\,,(\mathfrak{a} + A\,\mathfrak{c}') + \mathfrak{b}\,;(\mathfrak{b}' + B'\,\mathfrak{c}')),$$

где произвольный выбор консеквентов $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}'$ должен давать для антецедентов векторы

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \text{ и } \mathfrak{c} = A'\mathfrak{a} + B'\mathfrak{b}.$$

В этом случае соответствующие различным направлениям вектора $\mathfrak{r}$ значения вектора $\mathfrak{r}'$ будут, согласно формуле (2), находиться в одной и той же плоскости, и $\mathfrak{r}$ не может быть определено из $\mathfrak{r}'$ однозначно. Аффинор Φ называют в этом случае планарным аффинором. Аналогичным способом можно показать, что полная диада приводится к одному члену, если при произвольном выборе не компланарных антецедентов (или же консеквентов) консеквенты (или же антецеденты) коллинеарны. Если Φ есть простая диада $= (\mathfrak{d}\,;\mathfrak{e})$ (в данном случае речь идет о линейном аффиноре), то вектор $\mathfrak{r}'$ в который переходит при помощи Φ вектор $\mathfrak{r}$, отличен от нуля лишь в том случае, когда вектор $\mathfrak{r}$ имеет компонент, отличный от нуля в направлении антецедента $\mathfrak{e}$.

§ 48. Нормальный вид полной диады.

1. Каждая полная диада может быть представлена двумя группами из трех взаимно перпендикулярных векторов.

Линейная векторная функция $\mathfrak{r} = \Phi \bar{\mathfrak{r}}$, где $\bar{\mathfrak{r}}$ обозначает единичный вектор, представляет собой радиус — вектор эллипсоида. Она дает, как и любое линейное преобразование координат, преобразования сферы в эллипсоид. Возьмем за антецеденты диады Φ векторы $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, совпадающие по величине и направлению с тремя главными взаимно-перпендикулярными осями; одна из теорем аналитической геометрии говорит, что линейное преобразование координат преобразует сферу в эллипсоид таким образом, что три взаимно перпендикулярные направления главных осей эллипсоида получаются из трех взаимно-перпендикулярных радиусов сферы. Соответственно с этим имеем три величины:

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{a},$$
$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{b},$$
$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{c}.$$

значения $\mathfrak{r}$, также взаимно перпендикулярные, которые мы обозначаем через $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$; если однако

$$\mathfrak{r}' = \Phi \cdot \overline{\mathfrak{r}}$$

должно для $\overline{\mathfrak{r}} = \mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ перейти в антецетенты диады, то консеквенты должны принять значения $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$. Таким образом, любая диада может быть приведена к виду:

(1) $$\Phi = \mathfrak{a};\ \mathfrak{i} + \mathfrak{b};\ \mathfrak{j} + \mathfrak{c};\ \mathfrak{k},$$

где $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ и $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ представляют собой две группы взаимно перпендикулярных векторов.

Из правил вычислений диад и векторов может быть выведена обратно упомянутая теорема аналитической геометрии. Для этой цели берем наибольшую абсолютную величину преобразованного вектора $\mathfrak{r}'$, как первый антецедент $\mathfrak{a}$, а соответствующий вектор $\overline{\mathfrak{r}}$ обозначаем через $\mathfrak{i}$. За второй антецедент $\mathfrak{b}$ берем тот вектор $\mathfrak{r}'$, который имеет наибольшую абсолютную величину из всех векторов, соответствующих вектору $\overline{\mathfrak{r}}$ и перпендикулярных к $\mathfrak{i}$; соответствующий ему вектор $\overline{\mathfrak{r}}$ обозначаем через $\mathfrak{j}$, как третий антецедент $\mathfrak{c}$ берется вектор $\mathfrak{r}'$, который выводится из вектора $\mathfrak{k}$, перпендикулярного к векторам $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{i}$. Тогда векторная функция будет

(2) $$\mathfrak{r}' = (\mathfrak{a}; \mathfrak{i} + \mathfrak{b};\ \mathfrak{j} + \mathfrak{c}; \mathfrak{k}) \cdot \overline{\mathfrak{r}}.$$

В точке, где $\mathfrak{r}'$ достигает наибольшей величины, $\mathfrak{r}'$ и $d\mathfrak{r}'$ взаимно-перпендикулярны, и таким образом

(3) $$\mathfrak{r}' \cdot d\mathfrak{r}' \equiv \mathfrak{r}' \cdot (\mathfrak{a};\ \mathfrak{i} + \mathfrak{b}; \mathfrak{j} + \mathfrak{c};\ \mathfrak{k}) \cdot d\overline{\mathfrak{r}} = 0,$$

так как, согласно уравнению (2) и уравнению (6) § 43,

$$d\mathfrak{r}' = (\mathfrak{a};\ \mathfrak{i} + \mathfrak{b};\ \mathfrak{j} + \mathfrak{c};\ \mathfrak{k}) \cdot d\overline{\mathfrak{r}}.$$

В данном случае только $\mathfrak{r}'$ должно принять значение $\mathfrak{a}$, в то время, как $d\overline{\mathfrak{r}}$ перпендикулярен к $\overline{\mathfrak{r}}$, т. е. — к $\mathfrak{i}$, и скалярное произведение (3) приводится к

$$\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b}\, b_1 + \mathfrak{c}\, c_1) = 0,$$

если положить $\mathfrak{j} \cdot d\overline{\mathfrak{r}} = b_1$, и $k \cdot d\overline{\mathfrak{r}} = c_1$. Итак, $\mathfrak{a}$ перпендикулярно к плоскости векторов $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$. В этой плоскости

$\mathfrak{b}$ снова является наибольшим значением $\mathfrak{r}'$, так что вдоль линии пересечения эллипсоида c плоскостью

$$\mathfrak{r}' \, d\mathfrak{r}' = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c} \cdot c_2 = 0,$$

если принять во внимание, что $d\bar{\mathfrak{r}}$ перпендикулярно к $\mathfrak{r}$, в данном случае — к $\mathfrak{j}$, и если положить $d\bar{\mathfrak{r}}' \cdot \mathfrak{k} = c_2$. Отсюда следует, что $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ также взаимно перпендикулярны.

2. Представление диады в виде двух групп трех взаимно перпендикулярных векторов называется **нормальным видом диады**; в этом случае мы пишем:

(4) $$\Psi = (a\,\mathfrak{i}'; \mathfrak{i} + b\,\mathfrak{j}'; \mathfrak{j} + c\,\mathfrak{k}'; \mathfrak{k}).$$

Особое значение имеет случай, когда в диаде нормального вида диады $a = b = c$; тогда

$$\Phi = a\,(\mathfrak{i}'; \mathfrak{i} + \mathfrak{j}'; \mathfrak{j} + \mathfrak{k}'; \mathfrak{k}).$$

Применение этой диады равносильно произведению и одновременному с ним приращению вектора по всем направлениям на одну и ту же величину.

Если $a = b = c = 1$ то Φ является **верзором**, для которого действительно соотношение (8) § 46.

Если, наконец, $a = b = c = 1$ и $\mathfrak{i}' = \mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}' = \mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}' = \mathfrak{k}$, то мы имеем **единичную или идентичную диаду**

(5) $$J = (\mathfrak{i}; \mathfrak{i} + \mathfrak{j}; \mathfrak{j} + \mathfrak{k}; \mathfrak{k}),$$

в которую обращается Φ.

Применение идентичной диады к вектору приводит вектор к самому себе, т. е.

(6) $$\mathfrak{r} = J \cdot \mathfrak{r};$$

точно так же:

$$\Phi = \Phi \; J = J \; \Phi.$$

Произведение двух диад, согласно § 46, есть также диада; таким образом, при данной величиние Φ должно удовлетворяться уравнение:

$$\Phi \cdot \Psi = J.$$

Это уравнение требует если мы, как и выше, представляли под применением Φ и Ψ к вектору $\mathfrak{r}$ преобразование координат, причем преоорозование Φ должно уничтожаться преобразованием Ψ, т. е., если

$$\mathfrak{r}' = \Phi \cdot \mathfrak{r},$$

то

$$\Psi \cdot \mathfrak{r}' = \mathfrak{r}.$$

Таким образом, Ψ обозначает линейную векторную функцию $\mathfrak{r}$ вектора $\mathfrak{r}'$, если Φ является линейной векторной функцией $\mathfrak{r}$ от вектора $\mathfrak{r}'$. Ψ дает решение для уравнений преобразования $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{r}'$. Ψ' называется **обратной диадой** и обозначается символически Φ^{-1}.

§ 49. Полный дифференциал вектора.

Для представления бесконечно малой деформации какого-либо об'ема наполненного сплошной массой берут следующие уравнения. Пусть смещения точки x_1, y_1, z_1 даны величинами ξ_1, η_1, ζ_1, а соседней точки x_2, y_2, z_2 — величинами ξ_2, η_2, ζ_2; тогда имеем уравнение:

$$(1) \quad \xi_2 - \xi_1 = (x_2 - x_1)\frac{\partial \xi}{\partial x} + (y_2 - y_1)\frac{\partial \xi}{\partial y} + (z_2 - z_1)\frac{\partial \xi}{\partial z},$$

и соответственные уравнения для

$$\eta_2 - \eta_1, \ \zeta_2 - \zeta_1;$$

Величины $\xi_2 - \xi_1$, $\eta_2 - \eta_1$, $\zeta_2 - \zeta_1$ являются компонентами относительного смещения соседних точек и выражаются уравнениями (1), как линейные функции компонентов $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$, когда известны производные $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \ldots;$ другими словами, вектор $d\mathfrak{v}$ с компонентами $\xi_2 - \xi_1$, $\eta_2 - \eta_1$, $\zeta_2 - \zeta_1$, выражается линейно вектором $d\mathfrak{r}$ с компонентами $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$. Вводя векторное изображение, мы полагаем

$$\xi \mathfrak{i} + \eta \mathfrak{j} + \zeta \mathfrak{k} = \mathfrak{v};$$

тогда система наших уравнений переходит в

(2) $$d\mathfrak{v} = \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial x};\ \mathfrak{i} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial y};\ \mathfrak{j} + \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial z};\ \mathfrak{k}\right) \cdot d\mathfrak{r} = \Phi \cdot d\mathfrak{r},$$

где Φ заменяет собой выражение в скобках. В окончательной форме, аналогично формуле (7) § 44, имеем:

(3) $$\left\{\begin{aligned} \Phi = {} & \frac{\partial \xi}{\partial x}\mathfrak{i}\mathfrak{i} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\mathfrak{j}\mathfrak{i} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\mathfrak{k}\mathfrak{i} \\ & + \frac{\partial \xi}{\partial y}\mathfrak{i}\mathfrak{j} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\mathfrak{j}\mathfrak{j} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\mathfrak{k}\mathfrak{j} \\ & + \frac{\partial \xi}{\partial z}\mathfrak{i}\mathfrak{k} + \frac{\partial \eta}{\partial z}\mathfrak{j}\mathfrak{k} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\mathfrak{k}\mathfrak{k}; \end{aligned}\right.$$

или, аналогично формуле (7) § 43,

(4) $$\left\{\begin{aligned} \Phi = {} & \frac{\partial \xi}{\partial x},\ \frac{\partial \eta}{\partial x},\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ & \frac{\partial \xi}{\partial y},\ \frac{\partial \eta}{\partial y},\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ & \frac{\partial \xi}{\partial z},\ \frac{\partial \eta}{\partial z},\ \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Мы можем согласно принятому в § 19 способу изображения, писать левую сторону уравнения (2) в символическом виде

(5) $$(d\mathfrak{r}\nabla)\,\mathfrak{v} = (d\mathfrak{r}\nabla)\,\xi\,\mathfrak{i} + (d\mathfrak{r}\nabla)\,\eta\,\mathfrak{j} + (d\mathfrak{r}\nabla)\,\zeta\,\mathfrak{k}$$

или

(6) $$(d\mathfrak{r}\nabla)\,\mathfrak{v} = \Phi \cdot d\mathfrak{r} = d\mathfrak{r} \cdot \Phi_c.$$

Если мы будем рассматривать, как уже делали ранее, оператор ∇, как символический вектор:

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

и $(d\mathfrak{r}\,\nabla)$—как скалярное произведение двух векторов, то уравнение (6) показывает, что $(d\mathfrak{r}\,\nabla)\,\mathfrak{v}$ представляет собой диаду, состоящую из векторов ∇ и $\mathfrak{v}$, и помноженную на $d\mathfrak{r}$, т. е.

(7) $$d\mathfrak{r}\cdot\nabla;\mathfrak{v}=d\mathfrak{r}\cdot\Phi_c.$$

Этот новый способ представления полного дифференциала, в противоположность примененному ранее, не является чисто символическим. Здесь мы видим, что диада является скорее действительным физическим образованием, причем эта реальная величина Φ_c умножается на реальный вектор.

К этому приводит нас следующее рассуждение, показывающее, что диада может быть представлена, как поверхность второго порядка.

Уравнение (2), или (6), нам дает относительное смещение $d\mathfrak{v}$ двух точек, находящихся друг от друга на расстоянии $d\mathfrak{r}$. Необходимо исследовать, на какой поверхности находится конечная точка смещения $d\mathfrak{v}$ на единицу длины $d\mathfrak{r}$, происходящего по различным направлениям $d\mathfrak{r}$, если начальная точка не меняет своего положения. Из уравнения (2), если через Φ обозначить обратную диаду, следует:

(8) $$d\mathfrak{r}=\Phi^{-1}\cdot d\mathfrak{v}.$$

Пусть $d\mathfrak{r}$ есть единичный вектор; умножаем уравнение скаларно, на самое себя; получаем

(9) $$1=(\Phi^{-1}\cdot d\mathfrak{v})^2,$$

что представляет собой квадратное уравнение относительно вектора $d\mathfrak{v}$. Таким образом, конечная точка $d\mathfrak{v}$ находится на поверхности второго порядка,—которая—если мы предположим конечные величины для всех смещений рассматриваемой системы—должна быть эллипсоидом. Этот эллипсоид вполне определен коэффициентом диады Φ^{-1}, или Φ.

§ 50. Применение к бесконечно-малым смещениям непрерывно распределенной массы.

Бесконечно малые относительные смещения точек неразрывной массы происходящее под действием каких-либо сил относительно находящейся в той же массе точки, принятой за начало представляемое при помощи линейной векторной функции вектора $\mathfrak{r}$, даны для точек, находящихся от начала на расстоянии $\mathfrak{r}$, формулой:

$$\mathfrak{v}_1 = \Phi_1 \cdot \mathfrak{r}, \tag{1}$$

причем расстояние точек от начала в конце смещения есть:

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{r} + \Phi_1 \cdot \mathfrak{r}.$$

К данному смещению прибавим еще деформацию, обозначаемую диадой Φ_2. После этого второго смещения координаты точек выразятся формулой:

$$\mathfrak{r} + \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 = \Phi_2 (\mathfrak{r} + \Phi_1 \mathfrak{r}) + \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{r},$$

или

$$\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 = \Phi_2 (\mathfrak{r} + \Phi_1 \mathfrak{r}) + \Phi_1 \mathfrak{r}. \tag{2}$$

Так как смещения должны быть бесконечно малы, то мы можем пренебречь величиной $\Phi_2 \Phi_1 \mathfrak{r}$, как величиной бесконечно малой высшего порядка по сравнению с прочими, и из уравнения (2) получаем выражение:

$$\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2 = \Phi_2 \mathfrak{r} + \Phi_1 \mathfrak{r}, \tag{2'}$$

дающее важное свойство — сложение многих бесконечно малых смещений.

Относительное увеличение расстояния $\mathfrak{r}$, происходящее при возникновении деформации (1), т. е. проекцию смещения $\mathfrak{v}$ в направлении $\mathfrak{r}$, отнесенной к единице длины $\mathfrak{r}$ — мы получим, умножая выражение (1) скалярно на $\mathfrak{r}$ и деля затем обе части его на $\mathfrak{r}^2$; таким образом, получаем:

$$\frac{\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{r}}{\mathfrak{r}^2} = \frac{\Phi \cdot \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}}{\mathfrak{r}^2}. \tag{3}$$

Так как

$$\Phi \cdot \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cdot \Phi \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{r} \cdot \Phi_c \cdot \mathfrak{r},$$

а векторы, стоящие по обоим сторонам Φ равны между собой, то

$$\Phi \cdot \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = \frac{1}{2}(\Phi + \Phi_c)\,\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = [\Phi]\,\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r}.$$

Таким образом, в общем случае бесконечно малой деформации расстояние выражается симметричной диадой первого рода, т. е. тензором.

Разложение диады Φ на две части — одну, симметричную (тензор), и одну, антисимметричную, имеет в рассматриваемом случае особое значение в физике. Изменение расстояния зависит от тензора. Таким образом, если деформация такова, что эта часть обращается в нуль, то ни по одному из направлений деформации не происходит дилатации (расширения), иначе говоря — движение среды происходит подобно движению твердого тела. В силу этого следует, что вторая антисимметричная часть диады представляет собой вращение среды вокруг точки, относительно которой рассматриваются смещения; эта вторая часть принимает вид:

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\Phi - \Phi_c) = \frac{1}{2}\{0,\ a_2 - b_1,\ c_1 - a_3 \\ \qquad b_1 - a_2,\ 0,\ b_3 - c_2 \\ \qquad a_3 - c_1,\ c_2 - b_3,\ 0\} \\ = \frac{1}{2}\left\{0,\ \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x},\ \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x},\right. \\ \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y},\ 0,\ \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ \qquad \left.\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z},\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z},\ 0\right\}, \end{cases}$$

где производные деформации обозначаются согласно § 49.

Деформация, соответствующая этой диаде, выражается так:

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{v} = \frac{1}{2}(\Phi \quad - \Phi_c) \cdot \mathfrak{r} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right)[\mathfrak{k}\,\mathfrak{r}] + \\ \quad + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right)[\mathfrak{j}\,\mathfrak{r}] + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)[\mathfrak{i}\,\mathfrak{r}] = [rot\ \mathfrak{v} \quad \mathfrak{r}]. \end{cases}$$

Если точка, к которой отнесены эти смещения, сама испытывает бесконечно-малое смещение, то для получения абсолютного смещения мы должны прибавить смещение этой точки. Сказанное показывает, что каждое бесконечно малое смещение может быть представлено, как совокупность из:

1. Параллельного перемещения среды;

2. Дилатации, величина которой дается симметричной частью диады, определяющей линейную векторную функцию смещения;

3. Вращения среды вокруг начала координат, определяемое по величине и направлению антисимметричной частью диады.

§ 51. Главные оси дилатации. Чисто об'емная дилатация.

Из уравнения (3) прошлого параграфа, определяющего дилатацию в наперед заданном направлении, мы можем получить направления главных осей дилатации, т. е., направления, в которых дилатация достигает наибольших и наименьших значений. После того, как мы уже выше показали, что деформация превращает сферу в эллипсоид, само собой следует, что главные оси дилатации совпадают с главными осями эллипсоида. Однако рекомендуется для упражнения вычислить главные оси дилатации и вместе с тем показать, что по их направлениям происходят лишь изменения длин, а вовсе не изменения направления радиуса вектора. Для одного из трех особых значений относительного приращения в направлении по длине мы должны иметь нуль. При дифференцировании выражения

$$(1)\qquad \frac{\mathfrak{v}\cdot\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}^2}=\frac{[\Phi]\cdot\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}^2}=[\Phi]\cdot\bar{\mathfrak{r}}\cdot\bar{\mathfrak{r}}$$

необходимо учитывать, что для единичного вектора $\bar{\mathfrak{r}}$ должно удовлетворяться соотношение:

$$(2)\qquad \bar{\mathfrak{r}}\cdot d\bar{\mathfrak{r}}=0.$$

Дальше имеем

$$d\left\{[\Phi]\bar{\mathfrak{r}}\cdot\bar{\mathfrak{r}}\right\}=[\Phi]d\bar{\mathfrak{r}}\cdot\bar{\mathfrak{r}}+[\Phi]\bar{\mathfrak{r}}\cdot d\bar{\mathfrak{r}},$$

или, в силу симметричности диады,

$$[\Phi]d\bar{\mathfrak{r}}\cdot\bar{\mathfrak{r}}\equiv\bar{\mathfrak{r}}\cdot[\Phi]\cdot d\bar{\mathfrak{r}}=d\bar{\mathfrak{r}}\cdot[\Phi]\cdot\bar{\mathfrak{r}}\equiv[\Phi]\bar{\mathfrak{r}}\cdot d\bar{\mathfrak{r}},$$

следовательно,

$$d\left\{[\Phi]\bar{\mathfrak{r}}\cdot\bar{\mathfrak{r}}\right\}=2[\Phi]\bar{\mathfrak{r}}\cdot d\bar{\mathfrak{r}}.$$

Вычитая из этого выражения, равного нулю, уравнение (2), умноженное на произвольную скалярную величину λ и выраженное идентичной диадой J. т. е. уравнение

$$\lambda J\cdot\bar{\mathfrak{r}}\cdot d\bar{\mathfrak{r}}=0,$$

получаем:

$$(3)\qquad ([\Phi]-\lambda J)\cdot\bar{\mathfrak{r}}\cdot d\bar{\mathfrak{r}}=0.$$

Это уравнение должно удовлетворятыя при любых значениях $d\bar{\mathfrak{r}}$ и, следовательно, также при тех значениях $d\bar{\mathfrak{r}}$, когда $d\bar{\mathfrak{r}}$ совпадает с направлением вектора

$$([\Phi]-\lambda J)\cdot\bar{\mathfrak{r}},$$

следовательно, самый вектор должен также равняться нулю. Этому условию эквивалентны три уравнения скалярных однородных и линейных относительно компонетов r_1, r_2, r_3 вектора $\overline{\mathfrak{r}}$.

Подобные уравнения могут быть составлены лишь, когда обращается в нуль детерминант диады $([\Phi] - \lambda J)$, т, е. детерминант, составленный из коэффициентов диады. Это условие приводит к уравнению третьей степени относительно λ, дающему три действительных решения. Каждому значению λ соответствует система значений компонентов r_1, r_2, r_3 вектора $\overline{\mathfrak{r}}$. Получаемые, таким образом, направления мы обозначим через $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$, $\mathfrak{r}'''$. Эти направления взаимно перпендикулярны. что нетрудно увидеть из уравнения (3). Уравнение (3) относительно λ_1 и $\mathfrak{r}'$, сокращенное на $d\overline{\mathfrak{r}}$, принимает вид:

$$([\Phi] - \lambda_1 J)\,\overline{\mathfrak{r}}' = 0, \tag{4}$$

а относительно λ_2 и $\mathfrak{r}''$ —

$$([\Phi] - \lambda_2 J)\,\overline{\mathfrak{r}}'' = 0. \tag{4'}$$

Умножая первое уравнение скаларно на $\mathfrak{r}''$, а второе на $\mathfrak{r}'$ и вычитая второе из первого, получаем:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,\overline{\mathfrak{r}}'\,\overline{\mathfrak{r}}'' = 0.$$

Таким образом, если λ_1 и λ_2 не равны между собой, то $\overline{\mathfrak{r}}'$ и $\overline{\mathfrak{r}}''$ должны быть взаимно перпендикулярны. То же следует и для комбинации $\overline{\mathfrak{r}}'''$, $\overline{\mathfrak{r}}'$ и $\overline{\mathfrak{r}}'''$, $\overline{\mathfrak{r}}''$, когда λ_3 отлична от λ_1 и λ_2.

В этом случае существуют три взаимно перпендикулярных направления, по которым дилатация получает предельные значения. Эти три направления являются главными осями эллипсоида, определяемого диадой преобразования Φ.

Величину дилатации по трем направлениям мы получаем из уравнений (4), (4') и соответствующего уравнения относительно λ_3, так как $[\Phi]\,\mathfrak{r}$ является той частью деформации, которая относится к удлинению. Итак, мы имеем

$$
(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r'}\,\mathfrak{v}_1 = [\Phi]\,\bar{\mathfrak{r}}' = \lambda_1\,\bar{\mathfrak{r}} \\[2ex] \dfrac{1}{r''}\,\mathfrak{v}_2 - \lambda_2\,\bar{\mathfrak{r}}'' \\[2ex] \dfrac{1}{r'''}\,\mathfrak{v}_3 = \lambda_3\,\bar{\mathfrak{r}}'''. \end{cases}
$$

Огсюда следует, что по главным направлениям дилатации деформация $[\Phi]$ вызывает лишь удлинения, а не изменения направления радиуса — вектора,

Дилатация об'ема сферы радиуса, равного единице, при деформации в эллипсоид с полуосями: $1+\lambda_1$; $1+\lambda_2$, $1+\lambda_3$ для единицы об'ема называется единицей дилатации, а так как λ_1, λ_2, λ_3 по сравнению с единицей малы, то единица дилатации равна $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$. Она равна сумме диагональных членов диады Φ, или тензора $[\Phi]$, так как λ_1, λ_2, λ_3 являются решениями уравнения третьей степени, получаемого приравниванием нулю детерминанта, составленного из коэффициентов диады $([\Phi]-\lambda J)$. Об'емная дилатация будет равна нулю, если $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, или

$$
(6) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,
$$

что представяет собой уравнение гидродинамики, дающее условие неразрывности жидкости. Диаде, связанной подобным условием, соответствует чисто внешнее изменение. Если после деформации внешнего изменения (изменения формы) не произошло, то величина дилатации должна быть одинаковой по всем направлениям, т. е., длины λ_1, λ_2, λ_3 равны между собой. Условия, которым в данном случае подчинены коэффициенты диады преобразования мы находим следующим путем. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то линейная векторная фунция

$$\mathfrak{v} = [\Phi]\,\mathfrak{r} = A\,\mathfrak{v}_1 + B\,\mathfrak{v}_2 + C\,\mathfrak{v}_3 = \\ = A\,\lambda_1\,\mathfrak{r}' + B\,\lambda_2\,\mathfrak{r}'' + C\,\lambda_3\,\mathfrak{r}''',$$

которой в общем случае дилатации соответствует вектор

$$\mathfrak{r} - A\,\mathfrak{r}' + B\,\mathfrak{r}'' + C\,\mathfrak{r}''',$$

переходит в:

$$\mathfrak{v} = \lambda_1 (A\,\mathfrak{r}' + B\,\mathfrak{r}'' + C\,\mathfrak{r}''') = \lambda_1\,\mathfrak{r} = \lambda_1\,J \cdot \mathfrak{r}.$$

Следовательно, при любом векторе имеем:

$$([\Phi] - \lambda_1\,J) \cdot \mathfrak{r} = 0,$$

или

$$[\Phi] = \lambda_1\,J. \tag{7}$$

Две диады равны лишь в том случае, когда все коэффициенты их нормального вида равны между собой. Коэффициенты J нам известны, и потому

$$\begin{cases} a_1 = b_2 = c_3 = \lambda; \\ c_2 + b_3 = a_3 + c_1 = b_1 + a_2 = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Подобная деформация, коэффициенты которой удовлетворяют этим условиям т. е. такая которая вызывает увеличение размеров на одну и ту же величину по всем направлениям, не вызывая, однако, изменения направлений, называется *чисто об'емным изменением*.

§ 52 Скалярная и роторная диады.

В уравнении (8) § 44, выражающем $\mathfrak{a}$ в виде линейной функции $\mathfrak{b}$, векторные суммы в правой части могут быть представлены другим способом, чем в рассмотренных до сих пор диадах. В них вектор $\mathfrak{b}$ является сомножителем скалярного произведения. Мы можем представить векторную функцию в виде суммы трехкратного векторного произведения, в котором вектор $\mathfrak{b}$—аргумент линейной функции—является множителем, помимо дополнительного члена образованного скалярным умножением аргумента.

Уравнение (8) § 44 можно написать в виде:

$$(1)\begin{cases}\mathfrak{a} = (\mathfrak{b}\,\mathfrak{f})\mathfrak{c} + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{g})\,\mathfrak{d} + (\mathfrak{b}\,\mathfrak{h})\,\mathfrak{e} = \\ \quad = [\mathfrak{f}\,[\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}]] + [\mathfrak{g}\,[\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}]] + [\mathfrak{h}\,[\mathfrak{e}\,\mathfrak{b}]] + \mathfrak{b}(\mathfrak{f}\,\mathfrak{c} + \mathfrak{g}\,\mathfrak{d} + \mathfrak{h}\,\mathfrak{e}),\end{cases}$$

причем направления $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ наперед не заданы, они связаны лишь условием некомпланарности.

Символически можно писать:

$$(2)\qquad\begin{cases}\mathfrak{a} = [\mathfrak{f}\,[\mathfrak{c} + [\mathfrak{g}\,[\mathfrak{d} + [\mathfrak{h}\,[\mathfrak{e}\,, \mathfrak{b}]] + D\cdot\mathfrak{b} = \\ \quad = (\mathfrak{f}\,\mathfrak{c} + \mathfrak{g}\,\mathfrak{d} + \mathfrak{h}\,\mathfrak{e}) \times \mathfrak{b} + D\cdot\mathfrak{b}.\end{cases}$$

Действия производимые в прямоугольных скобках, обозначаются также через

$$(3)\qquad \mathfrak{f}\,\mathfrak{c}^{\times} \quad \text{и} \quad \mathfrak{f} \overset{\times}{/}\, \mathfrak{c},$$

как диады, и в отличие от ранее рассмотренного вида, т. е. скалярной или линейной диады, этот диаду называют роторной или планарной. Сумма произвольного числа одного и того же вида, диад может быть приведена к сумме не свыше трех диад того же вида. Относительно скалярных диад мы будем придерживаться сказанного в § 46. Для роторных диад мы поступаем следующим образом. Пусть дана сумма из более чем трех диад, посредством которых мы должны представить линейную векторную функцию. Каждая линейная векторная функция может быть, как мы уже видели, представлена в виде суммы трех роторных диад и дополнительного члена — вектора, параллельного аргументу линейной векторной функции. Однако, переменный вектор нельзя представить в виде тройного векторного произведения вида $[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}]]$, в котором этот вектор являлся бы сомножителем; следовательно, дополнительный вектор в линейной векторной функции может также быть получен из роторной диады; иными словами, если берется сумма роторных диад, то абсолютная величина этого вектора должна равняться нулю. Таким образом сумма может быть представлена тремя роторными диадами. Такие диады, приведенные к трем членам и не могущие быть упрощенными, в дальнейшем называются **полными скалярными** или же **полными роторными диадами.**

§ 53. Применение диад в тройном векторном произведении.

Применение диад к линейным векторным функциям удобно потому, что тройное векторное произведение

$$\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}] \text{ и } [\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}]]$$

не допускает приведения к форме, в которой переменный вектор $\mathfrak{r}$ содержался бы в явном виде, а именно — **перемноженным с известным уже видом обоих данных векторов.** При помощи диад всякое произведение трех векторов, между которыми находится и переменный вектор, приводится к известной уже форме в виде комбинации из двух данных векторов с переменным. В тройном произведении оба постоянных вектора $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ могут встретиться лишь в следующих комбинациях:

1. $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$, как скалярное произведение в $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,\mathfrak{r}$
2. $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$, как векторное произведение в $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{r}$ и $[[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{r}]$
3. $\left.\begin{matrix}\mathfrak{a}\,(\mathfrak{b}\\ \mathfrak{a})\,\mathfrak{b}\end{matrix}\right\}$, как скалярная диада в $\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}]$ или $[\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{b}$
4. $\left.\begin{matrix}\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\\ \mathfrak{a}]\,\mathfrak{b}\end{matrix}\right\}$ в $\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}]$ или $[\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{b}$
5. $\left.\begin{matrix}[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\\ \mathfrak{a}]\,\mathfrak{b}]\end{matrix}\right\}$, как роторная диада в $[\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}]]$ или $[[\mathfrak{r}\,\mathfrak{a}]\,\mathfrak{b}]$,

где сочетание (4) может быть приведено к сочетанию (2), так как

$$\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b}\,\mathfrak{r}] = [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,\mathfrak{r}\,.$$

Для задания диады необходимо знать направления обоих векторов $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, а также произведение из абсолютных величин. Этим самым определяются две первые комбинации—скалярное и векторное произведение. При исчислении диад их называют обычно **первым скаляром**, или же **первым ротором диады**.

Иоман, давший много работ в области систематического исследования исчисления диад, обозначает скалярные диады с помощью индекса *s* наверху, а роторные диады — с помощью аналогичного индекса *r*, если приходится пользоваться одновременно теми и другими. Таким образом, если для одного члена диады мы будем применять букву Λ, то

$$\Lambda^s = \mathfrak{a}\,(\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \cdot = \mathfrak{a}\,;\,\mathfrak{b}$$

$$\Lambda^r = [\mathfrak{a}\,[\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \times = \mathfrak{a} \overset{\times}{,} \mathfrak{b}\,.$$

Первый скалар диады, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, обозначается через Λ_s^s, или, как форма, полученная из роторной диады — через $-\,{}^1/_2\,\Lambda_s^r$, так что

$$\Lambda_s^s = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})$$

$$\Lambda_s^r = -\,2\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})\,.$$

Первый ротор диады, $[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$, обозначается через Λ_r^s, и $-\Lambda_r^r$; таким образом

$$\Lambda_r^s = -\,\Lambda_r^r = [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]\,.$$